
La lezione mancata

Le equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Ein guter Anfang braucht Begeisterung, ein gutes Ende Disziplin. (Un buon inizio richiede entusiasmo, un buon finale disciplina.)

— Dal film *Die Mannschaft (La squadra)* diretto da Martin Christ, Jens Gronheid, Ulrich Voigt.

Stefano De Leo Dipartimento di Matematica Applicata, Università Statuale di Campinas, Brasile.

In questa lezione sarà presentata, utilizzando il metodo di separazione delle variabili e lo sviluppo di funzioni in serie di Fourier, una risoluzione *unificata* delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Le equazioni dell'onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[W]}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{[W]}(x, t), \quad (1)$$

del calore,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[H]}(x, t) = \frac{1}{Lc} \frac{\partial}{\partial t} u^{[H]}(x, t), \quad (2)$$

e di Laplace,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[L]}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^{[L]}(x, t) = 0, \quad (3)$$

sono equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine, rispettivamente di tipo iperbolico, parabolico e ellittico [1, 2], che svolgono un ruolo importante nella formulazio-

ne e descrizione di molti fenomeni in vari campi della fisica, come per esempio l'acustica, la fluidodinamica, la termodinamica e l'ottica [3, 4].

In questa lezione, tali equazioni non verranno dedotte in quanto l'attenzione sarà focalizzata nella presentazione di un metodo di risoluzione unificato che permetta di evidenziare sia la potenzialità del metodo di separazione delle variabili e dell'uso delle serie di Fourier sia le analogie e differenze tra le soluzioni delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Per rendere questa lezione chiara, comprensiva e completa, prima di affrontare la risoluzione delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace, verrà introdotta un'appropriata notazione adimensionale (sezione I) e risolti alcuni integrali (lista di integrali presentata alla fine della lezione) che risulteranno utili nel determinare i coefficienti delle serie di Fourier (sezione III).

Il metodo di separazione delle variabili consentirà, isolando la parte spaziale in comune alle tre equazioni, di presentare una risoluzione unificata (sezione II). Vale la pena ricordare che un'equa-

zione non determina una soluzione, la soluzione è determinata quando altre condizioni, come le condizioni iniziali e/o al contorno, sono fissate. Analizzando particolari condizioni iniziali e al contorno che permettono la decomposizione in termini di semplici funzioni trigonometriche, si otterrà la soluzione in serie di Fourier i cui coefficienti, ottenuti a partire dalle condizioni date, determineranno univocamente la soluzione delle equazioni differenziali studiate. Un'analisi dettagliata delle soluzioni delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace sarà fatta per differenti condizioni iniziali e al contorno (sezioni III e IV). Prima di terminare la lezione, partendo dalla soluzione ottenuta per l'equazione del calore, sarà presentata la soluzione di un'altra importante equazione parabolica, cioè l'equazione di Schrödinger (sezione V), per la quale sarà analizzato, in particolare, il comportamento temporale di stati legati [5].

I. Notazione adimensionale

La scelta dei metodi utilizzati per risolvere problemi fisici che richiedono per la loro descrizione l'uso di equazioni differenziali alle derivate parziali, si basa sulla geometria del problema e sul tipo di condizioni al contorno. Per esempio, la scelta tra trasformate o serie di Fourier si basa sul fatto che nel primo caso l'intervallo di variazione della coordinata spaziale è infinito mentre nel secondo caso finito. Il più delle volte, il metodo di separazione delle variabili e l'uso di trasformate o serie sono strettamente legati.

L'equazione dell'onda è un'equazione differenziale lineare di tipo iperbolico che contiene una variabile temporale, una o più variabili spaziali e una funzione scalare, $u^{[W]}$, che deve essere determinata. In questa lezione sarà considerato il caso unidimensionale e sarà risolta l'equazione dell'onda con

$$0 \leq x \leq L \quad \text{e} \quad t \geq 0$$

condizioni al contorno

$$u^{[W]}(0, t) = u^{[W]}(L, t) = 0, \quad (4)$$

e condizioni iniziali

$$u^{[W]}(x, 0) = f(x), \quad \left[\frac{\partial u^{[W]}(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Prima di usare la tecnica di separazioni delle variabili e dare la soluzione in termini di funzioni trigonometriche è conveniente introdurre la seguente notazione adimensionale

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{ct}{L}.$$

Usando le nuove variabili è possibile riscrivere l'equazione dell'onda nella forma

$$u_{\xi\xi}^{[W]}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}^{[W]}(\xi, \tau), \quad (6)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[W]}(0, \tau) = u^{[W]}(1, \tau) = 0, \quad (7)$$

e condizioni iniziali

$$u^{[W]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0. \quad (8)$$

Usando la notazione adimensionale per l'equazione del calore si ha

$$u_{\xi\xi}^{[H]}(\xi, \tau) = u_{\tau}^{[H]}(\xi, \tau), \quad (9)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[H]}(0, \tau) = u^{[H]}(1, \tau) = 0, \quad (10)$$

e condizione iniziale

$$u^{[H]}(\xi, 0) = f(\xi). \quad (11)$$

Infine, introducendo la variabile adimensionale

$$\eta = \frac{y}{L},$$

possiamo riscrivere l'equazione di Laplace come segue

$$u_{\xi\xi}^{[L]}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}^{[L]}(\xi, \eta) = 0, \quad (12)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[L]}(0, \eta) = u^{[L]}(1, \eta) = 0, \quad (13)$$

e

$$u^{[L]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u^{[L]}(\xi, \eta) = 0. \quad (14)$$

Eq. dell'onda, del calore e di Laplace

Eq. dell' onda: $u_{\xi\xi}^{[W]}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}^{[W]}(\xi, \tau)$

Eq. del calore: $u_{\xi\xi}^{[H]}(\xi, \tau) = u_{\tau}^{[H]}(\xi, \tau)$

$$u^{[W,L]}(0, \tau) = u^{[W,L]}(1, \tau) = 0 ,$$

$$u^{[W,L]}(\xi, 0) = f(\xi) , \quad u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0 ,$$

$$0 \leq \xi \leq 1 , \quad \tau \geq 0 .$$

Eq. di Laplace: $u_{\xi\xi}^{[L]}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}^{[L]}(\xi, \eta) = 0$

$$u^{[L]}(0, \eta) = u^{[L]}(1, \eta) = 0 ,$$

$$u^{[L]}(\xi, 0) = f(\xi) , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u^{[L]}(\xi, \eta) = 0 ,$$

$$0 \leq \xi \leq 1 , \quad \eta \geq 0 .$$

II. Metodo di separazione delle variabili

Il metodo della separazione delle variabili è una tecnica importante di risoluzione di equazioni differenziali che può essere utilizzata quando la struttura dell'equazione consente di riscrivere l'equazione in maniera tale che le due variabili appaiano in lati differenti dell'equazione. Nel caso delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace è ragionevole cercare soluzioni del tipo

$$\begin{matrix} u^{[W]}(\xi, \tau) & T^{[W]}(\tau) \\ u^{[H]}(\xi, \tau) & = X(\xi) T^{[H]}(\tau) \\ u^{[L]}(\xi, \eta) & Y^{[L]}(\eta) \end{matrix} . \quad (15)$$

Utilizzando la separazione delle variabili nelle equazioni (6,9,12), è possibile trasformare le equazioni differenziali alle derivate parziali originali nelle seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{X_{\xi\xi}(\xi)}{X(\xi)} = \lambda , \quad (16)$$

e

$$\frac{T_{\tau\tau}^{[W]}(\tau)}{T^{[W]}(\tau)} = \frac{T_{\tau}^{[H]}(\tau)}{T^{[H]}(\tau)} = -\frac{Y_{\eta\eta}^{[L]}(\eta)}{Y^{[L]}(\eta)} = \lambda , \quad (17)$$

dove λ rappresenta la costante di separazione. Per $\lambda = 0$ l'equazione (16) ha come soluzione

$$X(\xi) = \alpha \xi + \beta .$$

In questo caso le condizioni al contorno (7,10,13) implicano

$$X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow X(\xi) = 0 ,$$

conducendo alla soluzione nulla.

Se $\lambda \neq 0$,

$$X(\xi) = A \exp[\sqrt{\lambda} \xi] + B \exp[-\sqrt{\lambda} \xi] . \quad (18)$$

Imponendo la condizione $X(0) = X(1) = 0$ si ha il seguente sistema matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 , \quad (19)$$

che ammette soluzione non banale quando

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}} = 1 .$$

Quindi le costanti della separazione saranno date dagli autovalori

$$\sqrt{\lambda_k} = i k \pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) . \quad (20)$$

Riscrivendo gli esponenziali immaginari in termini di funzioni trigonometriche, la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria (16) sarà data come una combinazione di autofunzioni seno e coseno associate agli autovalori λ_k ,

$$X_k(\xi) = a_k \sin(k \pi \xi) + b_k \cos(k \pi \xi) . \quad (21)$$

Usando la condizione $X(0) = 0$ si ha $b_k = 0$ e la soluzione sarà

$$X_k(\xi) \propto \sin(k \pi \xi) . \quad (22)$$

Tale soluzione soddisfa non solo la condizione $X(0) = 0$ ma anche la condizione $X(1) = 0$.

A partire dalle autofunzioni (22) e dagli autovalori (20) si potrà analizzare la parte complementare della separazione delle variabili e completare la risoluzione delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

II.A L'equazione dell'onda

Nell'equazione dell'onda, la funzione temporale $T^{[W]}$ soddisfa la stessa equazione differenziale

ordinaria della parte spaziale,

$$T_{\tau\tau}^{[W]}(\tau) = \lambda_k T^{[W]}(\tau) \quad (23)$$

La soluzione temporale sarà quindi data da

$$T_k^{[W]}(\tau) = c_k \sin(k \pi \tau) + d_k \cos(k \pi \tau) . \quad (24)$$

Usando la seconda delle condizioni iniziali dell'equazione (8), si ha

$$u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0 \Rightarrow T_{k,\tau}^{[W]}(0) = 0 \Rightarrow c_k = 0 ,$$

e le autofunzioni temporali saranno

$$T_k^{[W]}(\tau) \propto \cos(k \pi \tau) . \quad (25)$$

Infine, la linearità dell'equazione dell'onda permette di scrivere la soluzione come segue

$$u^{[W]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \cos(k \pi \tau) . \quad (26)$$

Questa soluzione soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali (6), le condizioni al contorno (7) e la seconda delle condizioni iniziali date in (8).

II.B L'equazione del calore

Nell'equazione del calore, la parte temporale soddisfa

$$T_{\tau}^{[H]}(\tau) = \lambda_k T^{[H]}(\tau) , \quad (27)$$

la cui soluzione é

$$T_k^{[H]}(\tau) \propto \exp(-k^2 \pi^2 \tau) . \quad (28)$$

La combinazione lineare delle autofunzioni spaziali e temporali darà

$$u^{[H]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau) , \quad (29)$$

soluzione dell'equazione del calore (9) con condizioni al contorno (10).

II.C L'equazione di Laplace

Nell'equazione di Laplace la parte spaziale in η si comporta diversamente dalla parte spaziale in ξ ,

$$Y_{\eta\eta}^{[L]}(\eta) = -\lambda_k Y^{[L]}(\eta) . \quad (30)$$

In questo caso la soluzione non sarà una combinazione di funzioni trigonometriche ma una combinazione di esponenziali reali,

$$Y_k^{[L]}(\eta) = c_k \exp(k \pi \eta) + c_k \exp(-k \pi \eta) . \quad (31)$$

Usando la seconda delle condizioni al contorno date in (14),

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Y^{[L]}(\eta) = 0 \Rightarrow c_k = 0 ,$$

si ha

$$Y^{[L]}(\eta) \propto \exp(-k \pi \eta) . \quad (32)$$

Quindi

$$u^{[L]}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k \pi \eta) \quad (33)$$

sarà soluzione dell'equazione differenziale (12) che soddisfa le condizioni al contorno (13) e la seconda delle condizioni al contorno (14).

III. Coefficienti di Fourier

Nelle soluzioni delle equazioni dell'onda (26), del calore (29) e di Laplace (33), appaiono le costanti arbitrarie f_k . Si vedrà adesso come determinare questi coefficienti affinché la soluzione dell'equazione dell'onda soddisfi la prima delle condizioni iniziali (8), quella dell'equazione del calore soddisfi la condizione iniziale (11) ed infine quella dell'equazione di Laplace soddisfi la prima delle condizioni al contorno (14),

$$u^{[W,H,L]}(\xi, 0) = f(\xi) .$$

Questa condizione impone il seguente vincolo sui coefficienti f_k ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) = f(\xi) . \quad (34)$$

Usando il primo degli integrali dati nella lista alla fine della lezione è facile dimostrare che i coefficienti di Fourier saranno determinati dall'integrale

$$f_k = 2 \int_0^1 d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi) . \quad (35)$$

Separazione delle variabili

Equazione dell'onda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \cos(k \pi \tau)$$

Equazione del calore:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau)$$

Equazione di Laplace:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k \pi \eta)$$

Coefficienti di Fourier:

$$f_k = 2 \int_0^1 d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi)$$

Analizzeremo adesso alcuni casi particolari per la funzione $f(\xi)$. Inizieremo con funzioni di tipo quadratiche e cubiche e finiremo con funzioni tipo seno che rappresentano buone approssimazioni per le funzioni quadratiche e cubiche e che hanno il vantaggio di avere soluzioni semplificate.

• Funzioni quadratiche e cubiche

Si considerino le seguenti funzioni

$$f(\xi) = \begin{cases} 4\xi(1-\xi) \\ 12\sqrt{3}(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi) \end{cases} \quad (36)$$

I coefficienti 4 e $12\sqrt{3}$ sono stati scelti per normalizzare le funzioni a valori di minimo/massimo dati da 0/1 per la funzione quadratica ($\xi = 0/\frac{1}{2}$) e $-1/1$ per la funzione cubica ($\xi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}/\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$).

Usando la lista degli integrali si ottengono, con semplici calcoli, i coefficienti di Fourier per le funzioni quadratiche e cubiche,

$$f_k = \begin{cases} 16 [1 - \cos(k \pi)] / k^3 \pi^3 \\ 72 \sqrt{3} [1 + \cos(k \pi)] / k^3 \pi^3 \end{cases} \quad (37)$$

Tali coefficienti determinano univocamente la soluzione dell'equazione dell'onda, del calore e di Laplace.

È interessante osservare che per la funzione quadratica solamente i valori dispari di k contribuiscono alla soluzione. Per l'equazione dell'onda avremo

$$u^{[W,qua]}(\xi, \tau) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{32}{(2k-1)^3 \pi^3} \sin[(2k-1)\pi\xi] \cos[(2k-1)\pi\tau].$$

Quindi si troverà una soluzione nulla per tempi $\tau = (2n-1)/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

$$u^{[W,qua]}(\xi, \frac{2n-1}{2}) = 0,$$

una soluzione uguale a $-f(\xi)^{[qua]}$ per $\tau = 2n-1$,

$$u^{[W,qua]}(\xi, 2n-1) = -f(\xi)^{[qua]},$$

ed infine si tornerà alla funzione iniziale $f(\xi)^{[qua]}$ per $\tau = 2n$,

$$u^{[W,qua]}(\xi, 2n) = f(\xi).$$

L'evoluzione temporale in termini dei parametri τ e η delle soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per funzioni quadratiche è illustrata in figura 1.

Per funzioni cubiche saranno i coefficienti con k pari a dare contributi non nulli,

$$u^{[W,cub]}(\xi, \tau) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3 \pi^3} \sin(2k\pi\xi) \cos(2k\pi\tau).$$

In questo caso la sola previsione che si può fare e sulla periodicità della soluzione,

$$u^{[W,cub]}(\xi, n) = f(\xi)^{[cub]}.$$

Il comportamento temporale completo è mostrato in figura 1. Osservando il comportamento temporale si può avere l'impressione che la soluzione dell'equazione dell'onda, con condizione iniziale cubica, sia per $\tau = 1/2$, uguale a $-f(\xi)^{[cub]}$. È chiaro che questa sarebbe una conclusione errata

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE: QUADRATICA E CUBICA

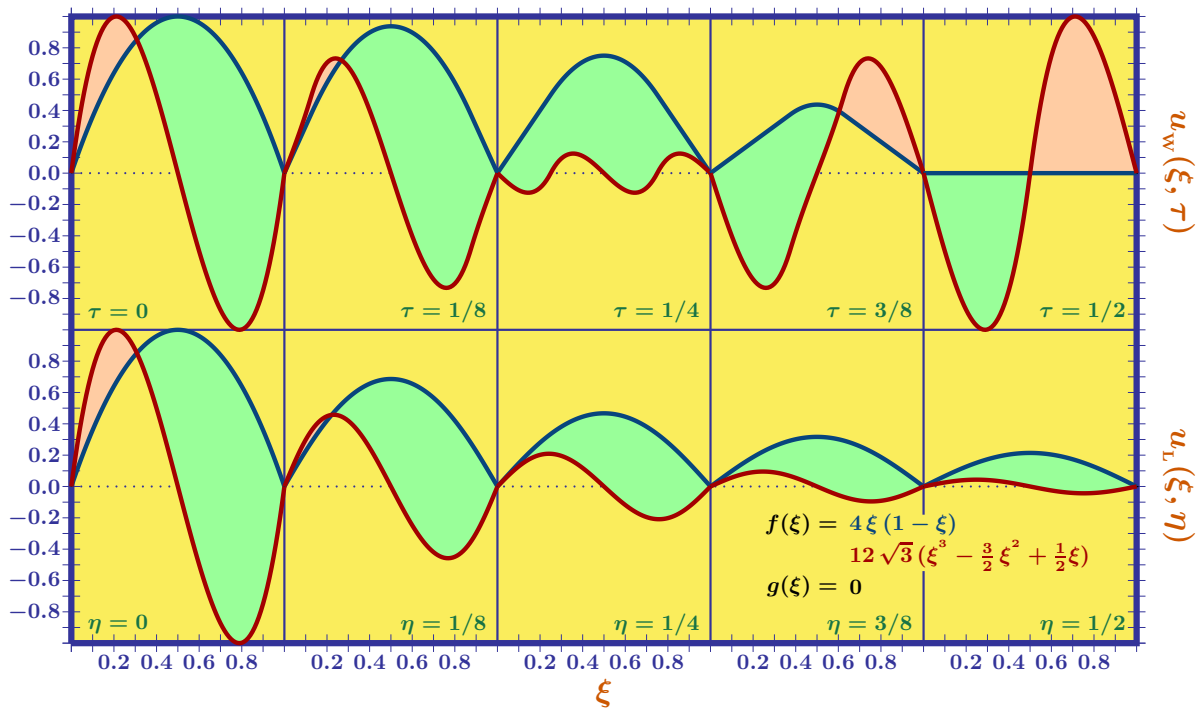


Figura 1: Soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per una funzione $f(\xi)$ di tipo quadratica, $4\xi(1-\xi)$, e per una funzione $f(\xi)$ di tipo cubica, $12\sqrt{3}(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi)$.

dato che

$$u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2}) = -f(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3\pi^3} \sin(2k\pi\xi) [1 + \cos(k\pi)] - f(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{288\sqrt{3}}{(4r)^3\pi^3} \sin(4r\pi\xi).$$

Il grafico illustrato in figura 2 mostra la differenza tra le funzioni $u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2})$ e $-f^{[cub]}(\xi)$.

Per la funzione cubica è interessante studiare cosa avviene per $\tau = 1/4$,

$$u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3\pi^3} \sin(2k\pi\xi) \cos(k\pi/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(4k\pi\xi) \cos(k\pi).$$

La soluzione sarà quindi nulla per i seguenti valori $\xi = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ (vedere figura 1). Per

$\xi = 1/8$ si avrà

$$u^{[W,cub]}(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(k\pi/2) \cos(k\pi) = -f^{[cub]}(\frac{1}{4})/8$$

e per $\xi = 3/8$

$$u^{[W,cub]}(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(k\pi/2) \cos^2(k\pi) = f^{[cub]}(\frac{1}{4})/8.$$

• Funzioni tipo seno

È interessante osservare che le funzioni tipo seno

$$f(\xi) = \begin{cases} \sin(\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{cases} \quad (38)$$

rappresentano una buona approssimazione per le funzioni quadratica e cubica (vedere la figura 3) ed hanno il grande vantaggio, semplificando i coefficienti di Fourier della serie

$$f_k = \begin{cases} \delta[k, 1] \\ \delta[k, 2] \end{cases}, \quad (39)$$

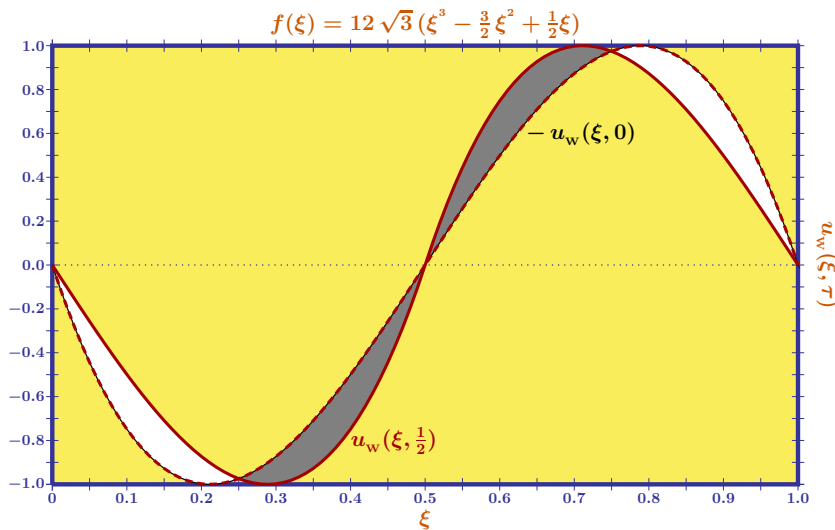


Figura 2: Differenza tra la soluzione $u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2})$ e la funzione $-f(\xi)$.

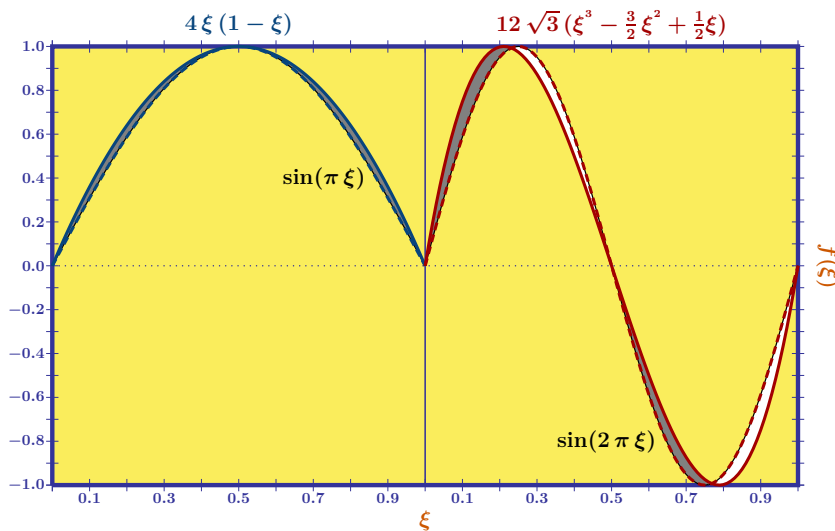


Figura 3: Comparando le funzioni quadratiche e cubiche con le funzioni tipo seno: $\sin(\pi\xi)$ e $\sin(2\pi\xi)$.

di portare alle seguenti soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace:

$$\begin{aligned}
 u^{[W]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \cos(\pi\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \cos(2\pi\tau), \end{cases} \\
 u^{[H]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \exp(-\pi^2\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \exp[-(2\pi)^2\tau], \end{cases} \quad (40) \\
 u^{[L]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \exp(-\pi\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \exp(-2\pi\tau). \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'evoluzione di queste soluzioni, presentata in figura 4, può essere comparata con l'evoluzione delle soluzioni ottenute a partire da funzioni quadratiche e cubiche date in figura 1.

Per il momento si sono risolti problemi con condizioni iniziale $u_\tau^{[W]}(\xi, 0) = 0$ e al contorno $u^{[L]}(\xi, \eta \rightarrow \infty) = 0$ nulle. Per condizioni non nulle, come si vedrà nella prossima sezione, il calcolo dei coefficienti di Fourier deve essere

rivisto e generalizzato.

IV. Cambiano le condizioni iniziali e al contorno

Si consideri adesso il caso in cui la seconda condizione iniziale per l'equazione dell'onda (8) e la seconda condizione al contorno per l'equazione di Laplace (14) siano rispettivamente generalizzate introducendo una nuova funzione $g(\xi)$,

$$u_\tau^{[W]}(\xi, 0) = g(\xi) \quad (41)$$

e

$$u^{[L]}(\xi, \alpha) = g(\xi). \quad (42)$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE TIPO SENO

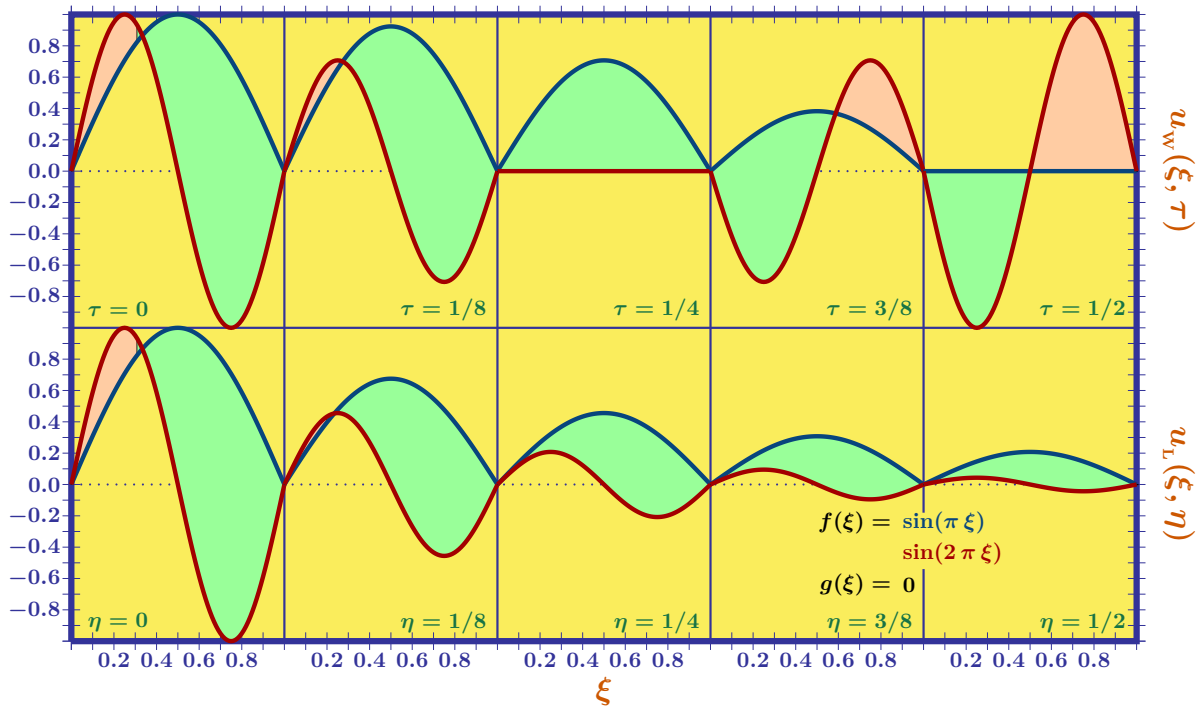


Figura 4: Soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per funzioni $f(\xi)$ tipo seno: $\sin(\pi \xi)$ e $\sin(2 \pi \xi)$. L'evoluzione in termini dei parametri τ e η è analizzata per una funzione $g(\xi)$ nulla.

Per determinare i coefficienti di Fourier che caratterizzano la soluzione dell'equazione dell'onda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{[W]} \sin(k \pi \tau) + d_k^{[W]} \cos(k \pi \tau) \right] \sin(k \pi \xi),$$

e quella dell'equazione di Laplace,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{[L]} \exp(k \pi \eta) + d_k^{[L]} \exp(-k \pi \eta) \right] \sin(k \pi \xi),$$

si useranno i coefficienti f_k e g_k ottenuti a partire dalle funzioni $f(\xi)$ e $g(\xi)$,

$$\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = 2 \int_0^1 d\xi \begin{bmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{bmatrix} \sin(k \pi \xi). \quad (43)$$

Utilizzando i coefficienti f_k ed i nuovi coefficienti g_k si troveranno i coefficienti delle serie di Fourier,

$$\begin{pmatrix} c_k^{[W]} \\ d_k^{[W]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k / k \pi \\ f_k \end{pmatrix} \quad (44)$$

e

$$\begin{pmatrix} c_k^{[L]} \\ d_k^{[L]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k - e^{-k \pi \alpha} f_k \\ e^{k \pi \alpha} f_k - g_k \end{pmatrix} / 2 \sinh(k \pi \alpha). \quad (45)$$

È interessante osservare che per

$$\alpha \gg 1$$

la soluzione dell'equazione di Laplace può essere semplificata in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k e^{k \pi (\eta - \alpha)} + f_k e^{-k \pi \eta} \right] \sin(k \pi \xi).$$

Quindi per

$$0 \leq \eta \leq 1,$$

ritroviamo il comportamento della soluzione ottenuta considerando una $g(\xi)$ nulla,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-k \pi \eta} \sin(k \pi \xi).$$

CAMBIANDO LE CONDIZIONI PER LE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE

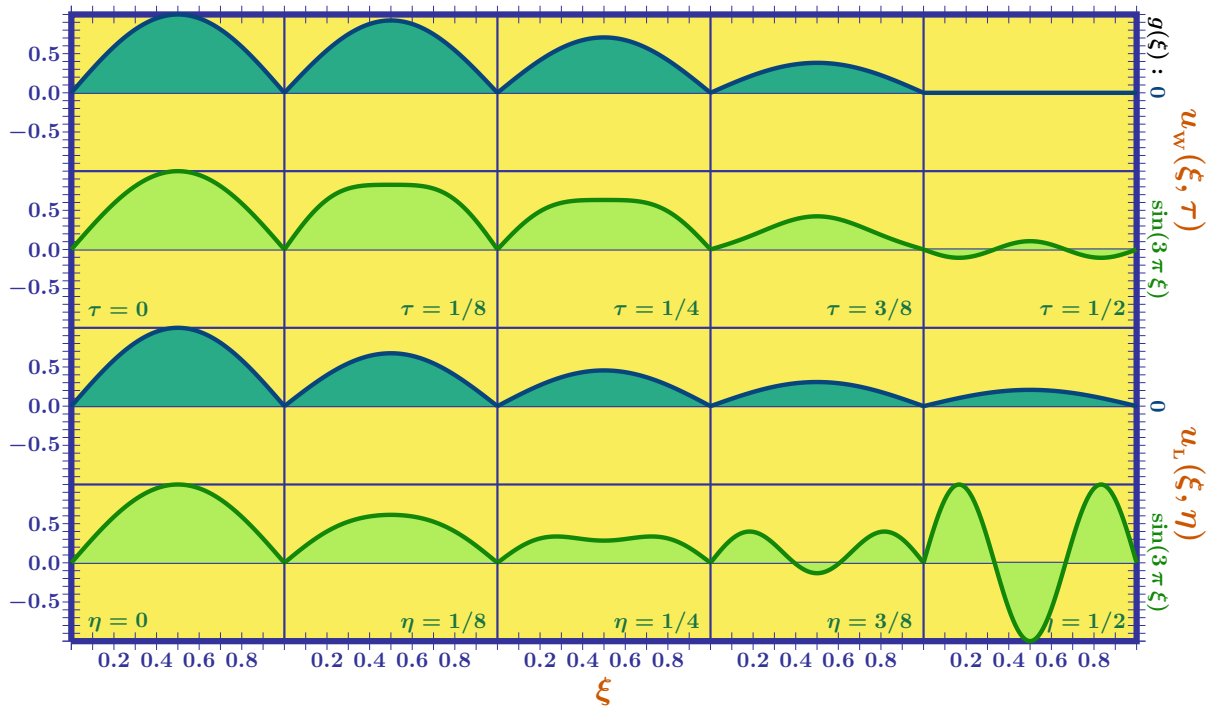


Figura 5: Confrontando le soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per una funzione $f(\xi) = \sin(\pi \xi)$ in presenza di differenti condizioni iniziali (onda) e di contorno (Laplace), $g(\xi) = 0$ e $g(\xi) = \sin(3\pi \xi)$.

Per $1 \leq \eta \ll \alpha$, si troverà una soluzione nulla ed infine per $\eta \lesssim \alpha$ si avrà

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{k\pi(\eta-\alpha)} \sin(k\pi \xi) .$$

È interessante analizzare il comportamento delle soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per condizioni iniziali e al contorno di tipo seno,

$$\{ f(\xi), g(\xi) \} = \{ \sin(r\pi \xi), \sin(m\pi \xi) \} , \quad (46)$$

con $(r, m = 1, 2, 3, \dots)$. La scelta di funzioni tipo seno semplifica notevolmente il calcolo dei coefficienti di Fourier portando alle soluzioni

$$u_{r,m}^{[W]}(\xi, \tau) = \frac{\sin(r\pi \xi) \cos(r\pi \tau) + \sin(m\pi \xi) \sin(m\pi \tau)}{m\pi} \quad (47)$$

e

$$u_{r,m}^{[L]}(\xi, \eta) = \frac{\sin(r\pi \xi) \sinh[r\pi(\alpha - \eta)]}{\sinh(r\pi \alpha)} + \frac{\sin(m\pi \xi) \sinh(m\pi \eta)}{\sinh(m\pi \alpha)} . \quad (48)$$

Il comportamento di queste soluzioni per $r = 1$, $m = 3$ ed $\alpha = 1/2$ è rappresentato graficamente nella figura 5.

Prima di concludere questa sezione è importante osservare che per la soluzione dell'equazione dell'onda con $r = 1$ e $m = 3$, si avrà per $\tau = 1 - \delta$ ($\delta \ll 1$),

$$u_{1,3}^{[W]}[\xi, 1 - \delta] = \sin(\pi \xi) \cos[\pi(1 - \delta)] + \frac{\sin(3\pi \xi) \sin[3\pi(1 - \delta)]}{3\pi} \approx -\sin(\pi \xi) + \delta \sin(3\pi \xi) . \quad (49)$$

Per $\xi = 1/2$ si troverà

$$u_{1,3}^{[W]}[\frac{1}{2}, 1 - \delta] \approx -(1 + \delta) .$$

Seguendo lo stesso ragionamento è facile provare che

$$u_{1,3}^{[W]}[\frac{1}{2}, 2 - \delta] \approx 1 + \delta .$$

Quindi la presenza di una condizione iniziale tipo $\sin(3\pi \xi)$ per la funzione $g(\xi)$, avrà come effetto una piccola amplificazione nelle oscillazioni dell'onda rispetto alle oscillazioni ottenute nel caso di una $g(\xi)$ nulla.

COMPORAMENTO TEMPORALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQ. DI SCHRÖDINGER

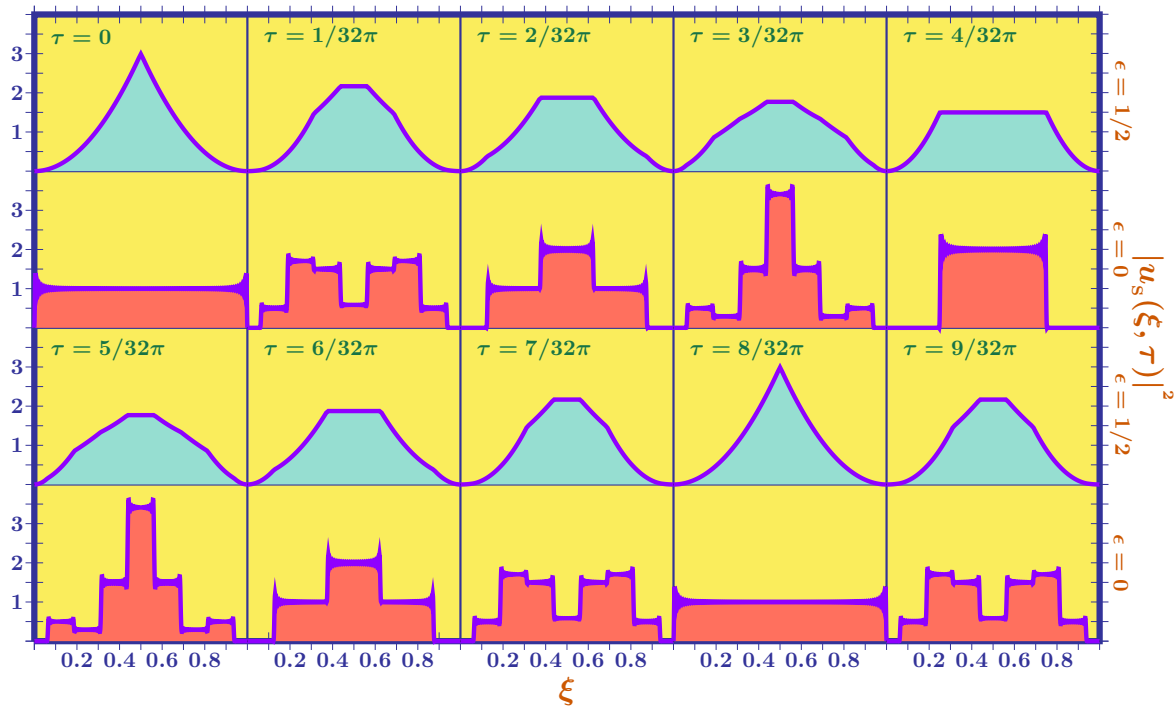


Figura 6: Confrontando il comportamento temporale delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per funzioni di onda iniziali di tipo triangolare ($\epsilon = 1/2$ e di tipo box ($\epsilon = 0$). È interessante osservare la periodicità per $\tau = 1/4 \pi$.

V. L'equazione di Schrödinger

In Meccanica Quantistica, l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive come uno stato quantico di un sistema fisico cambia col tempo [5]. Formulata dal fisico austriaco Erwin Schrödinger, nel caso unidimensionale libero assume la seguente forma

$$i \hbar u_t^{[S]}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}^{[S]}(x, t). \quad (50)$$

Usando la notazione adimensionale

$$\xi = \frac{x}{L} \quad e \quad \tau = \frac{\hbar t}{2mL^2},$$

l'equazione di Schrödinger può essere riscritta come

$$u_{\xi\xi}^{[S]}(\xi, \tau) = -i u_{\tau}^{[S]}(\xi, \tau). \quad (51)$$

Usando la stessa tecnica di risoluzione utilizzata per l'equazione del calore, la soluzione dell'equazione di Schrödinger (51), con condizioni al contorno

$$u^{[S]}(0, \tau) = u^{[S]}(1, \tau) = 0 \quad (52)$$

e condizione iniziale

$$u_{\tau}^{[S]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad (53)$$

sarà data da

$$u^{[S]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-i k^2 \pi^2 \tau). \quad (54)$$

È importante osservare che le condizioni al contorno date (52) portano alla presenza di stati legati (stati di energia quantizzata) per un potenziale tipo pozzo unidimensionale infinito

$$V_0 = \begin{cases} \infty & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{per } x > L \end{cases}.$$

Si consideri adesso, come condizione iniziale, la seguente funzione lineare

$$f(\epsilon, \xi) = N \begin{cases} \xi/\epsilon & (0 \leq \xi \leq \epsilon), \\ 1 & (\epsilon \leq \xi \leq 1 - \epsilon), \\ (1 - \xi)/\epsilon & (1 - \epsilon \leq \xi \leq 1), \end{cases} \quad (55)$$

con

$$N_\epsilon = \left(1 - \frac{4}{3} \epsilon\right)^{-1}.$$

La costante di normalizzazione è scelta per garantire una probabilità unitaria

$$\int_0^1 d\xi f^2(\epsilon, \xi) = 1.$$

Partendo dalla condizione iniziale $f(\epsilon, \xi)$, come fatto nelle sezioni precedenti, utilizzando la lista di integrali si possono determinare i coefficienti di Fourier,

$$f_{\epsilon,k} = 2 N_\epsilon \frac{\sin(\epsilon k \pi) [1 - \cos(k\pi)]}{\epsilon (k \pi)^2}. \quad (56)$$

In figura 6 è illustrato il comportamento temporale delle funzioni di onda di tipo triangolare ($\epsilon = \frac{1}{2}$)

$$24 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin[(2k-1)\pi\xi]}{[(2k-1)\pi]^2} \times \exp[-i(2k-1)^2\pi^2\tau] \times \left|u_{\Delta}^{[S]}(\xi, \tau)\right|^2 = \quad (57)$$

e di tipo quadrato ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\pi\xi]}{(2k-1)\pi} \times \exp[-i(2k-1)^2\pi^2\tau] \times \left|u_{\square}^{[S]}(\xi, \tau)\right|^2 = \quad (58)$$

Si osservi che per $\tau = 1/4\pi$ si avrà

$$\begin{aligned} \exp[-i(2k-1)^2\pi^2/4\pi] &= \\ \cos[k(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}] - i \cos[k(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}] &= \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e conseguentemente a $\tau = 1/4\pi$ si troverà la funzione iniziale $|f(\epsilon, \xi)|^2$.



- [1] T. L. CHOWN: *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [2] W. E. BOYCE AND R. C. DI PRIMA: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, New York (2001).
- [3] M. BORN AND E. WOLF: *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [4] B. E. A. SALEH AND M. C. TEICH: *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, New York (2007).
- [5] C. C. TANNODJI, B. DIU AND F. LALÖE: *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York (1977).
- [6] Lezione disponibile in pdf nella pagina web del Prof. Stefano De Leo:
<http://www.ime.unicamp.br/-deleo>



Stefano De Leo: Professore Associato presso il Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università Statale di Campinas (Unicamp), Brasile. Laureato con lode nel 1991 (Università degli Studi di Lecce, Italia), ha terminato il Dottorato in Fisica nel 1995 (Università degli Studi di Bari, Italia) ed ottenuto il titolo di Libera Docenza in Fisica Matematica nel 1999 (Unicamp).

Lista di Integrali

• **Primo integrale**

($r, k = 1, 2, 3, \dots$)

$$2 \int_0^1 d\xi \sin(r \pi \xi) \sin(k \pi \xi) = \int_0^1 d\xi \{ \cos[(r - k) \pi \xi] - \cos[(r + k) \pi \xi] \} = \boxed{\delta[k, r]}$$

• **Secondo integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{\sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} \right]_0^1 = \boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi}}$$

• **Terzo integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi^2 \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi^2 \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{2 \xi \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} + \frac{2 \cos(k \pi \xi)}{(k \pi)^3} \right]_0^1 =$$

$$\boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi} + \frac{2 \cos(k \pi)}{(k \pi)^3} - \frac{2}{(k \pi)^3}}$$

• **Quarto integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi^3 \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi^3 \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{3 \xi^2 \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} + \frac{6 \xi \cos(k \pi \xi)}{(k \pi)^3} - \frac{6 \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^4} \right]_0^1 =$$

$$\boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi} + \frac{6 \cos(k \pi)}{(k \pi)^3}}$$

• **Quinto integrale**

$$2 \int_0^1 d\xi \sin(r \pi \xi) e^{i r \pi \xi} \sin(k \pi \xi) = \delta[k, 2r] + 2i \int_0^1 d\xi \sin^2(r \pi \xi) \sin(k \pi \xi) =$$

$$\delta[k, 2r] + i \int_0^1 d\xi [1 - \cos[2r \pi \xi]] \sin(k \pi \xi) =$$

$$\delta[k, 2r] + i \left\{ -\frac{\cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{\cos[(k + 2r) \pi \xi]}{2(k + 2r) \pi} + \frac{\cos[(k - 2r) \pi \xi]}{2(k - 2r) \pi} \right\}_0^1 =$$

$$\delta[k, 2r] + \frac{2i}{\pi} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2(k + 2r)} - \frac{1}{2(k - 2r)} \right]_{k(\text{odd})} =$$

$$\boxed{\delta[k, 2r] + i \left[\frac{8r^2}{k(4r^2 - k^2)\pi} \right]_{k(\text{odd})}}$$

Quadro Riassuntivo

Equazione dell'onda: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}(\xi, \tau)$
Equazione del calore: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = u_{\tau}(\xi, \tau)$
Equazione di Schrödinger: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = -i u_{\tau}(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned}
 u(0, \tau) &= u(1, \tau) = 0, \\
 u(\xi, 0) &= f(\xi), \quad u_{\tau}(\xi, 0) = g(\xi), \\
 0 &\leq \xi \leq 1, \quad \tau \geq 0.
 \end{aligned}$$

Equazione di Laplace: $u_{\xi\xi}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0$

$$\begin{aligned}
 u(0, \eta) &= u(1, \eta) = 0, \\
 u(\xi, 0) &= f(\xi), \quad u(\xi, \alpha) = g(\xi), \\
 0 &\leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha.
 \end{aligned}$$

Equazione dell'onda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \pi \xi) [c_{W,k} \cos(k \pi \tau) + d_{W,k} \sin(k \pi \tau)]$$

Equazione del calore / di Schrödinger:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau) / \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-i k^2 \pi^2 \tau)$$

Equazione di Laplace:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \pi \xi) [c_{L,k} \exp(k \pi \tau) + d_{L,k} \exp(-k \pi \tau)]$$

Coefficienti di Fourier:

$$f_k = 2 \int d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi) \quad \diamond \quad g_k = 2 \int d\xi g(\xi) \sin(k \pi \xi)$$

$$\begin{pmatrix} c_{W,k} \\ d_{W,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k / k \pi \\ f_k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_{L,k} \\ d_{L,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k - e^{-k\pi\alpha} f_k \\ e^{k\pi\alpha} f_k - g_k \end{pmatrix} / 2 \sinh(k \pi \alpha)$$

$$f(\xi) : \begin{cases} \xi/\epsilon & (0 \leq \xi \leq \epsilon) \\ 1 & (\epsilon \leq \xi \leq 1 - \epsilon) \\ (1 - \xi)/\epsilon & (1 - \epsilon \leq \xi \leq 1) \end{cases} \Rightarrow f_k : \frac{4 \sin(\epsilon k \pi)}{\epsilon (k \pi)^2} \quad [k \text{ odd}]$$

$$\xi(1 - \xi) \quad \frac{8}{(k \pi)^3} \quad [k \text{ odd}]$$

$$\xi(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1) \quad \frac{12}{(k \pi)^3} \quad [k \text{ even}]$$