Martingala: l'origine di un nome

Carlo Sempi Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi," Università del Salento, Lecce, Italy 73100

Le martingale sono oggetti matematici della teoria delle probabilità. La probabilità è spesso introdotta nell'analisi dei giochi d'azzardo; cosí anche le martingale hanno un'interpretazione "ludica": esse descrivono un gioco equo, vale a dire un gioco nel quale nessuno di due giocatori è sicuro di vincere. Naturalmente, le martingale sono anche molto altro e hanno vaste applicazioni. In questa breve nota, cercherò di dare un'idea della definizione, ma soprattutto mi dedicherò alla ricerca delle origini del loro nome.

Funzioni misurabili

La probabilità è una funzione a valori in $[0,1]$ e definita su insiemi che rappresentano eventi; oltre che agli eventi singoli, diciamo A e B, è desiderabile poter parlare anche degli eventi "si realizzano sia A sia B", rappresentato dall'intersezione $A \cap B$, e "si realizza almeno uno tra A e B", rappresentato dall' unione $A \cup B$. In termini meno astratti, si consideri un giocatore che si avvicini a un tavolo di *roulette*; accanto ai risultati "esce il 17 o il 18" e "il risultato è un numero dispari" si possono considerare gli eventi "il risultato è 17 o 18 ma un numero dispari" e "il risultato è il 17, il 18 oppure un numero dispari". Per ragioni tecniche si considerano non solo unioni finite, ma anche unioni numerabili, come nella definizione che segue.

Uno spazio di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove Ω è un insieme non vuoto, $\mathcal{F}$ è una *tribù*, o σ*–algebra* di sottoinsiemi di Ω, e $\mathbb{P}$ è una misura[1] definita in $\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Una tribù è una famiglia che soddisfà a tre requisiti: $\Omega \in \mathcal{F}$, il complementare A^c di un insieme A di $\mathcal{F}$ è ancora in $\mathcal{F}$ e l'unione *numerabile* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ degli insiemi di una successione (A_n) di insiemi di $\mathcal{F}$ appartiene anch'essa a $\mathcal{F}$. Gli insiemi di $\mathcal{F}$ si dicono *misurabili*.

Nel caso $\Omega = \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, si considera di solito la tribù di Borel $\mathcal{B}$, che è la piú piccola tribù di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contenga gli insiemi aperti, o, ciò che si dimostra essere lo stesso, gli intervalli $]a, b]$. Gli insiemi di $\mathcal{B}$ si chiamano *boreliani*.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile (rispetto a* $\mathcal{F}$*)* se l'immagine inversa $\varphi^{-1}(B)$ di ogni boreliano B appartiene a $\mathcal{F}$. Per esempio, ogni funzione continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile, poiché l'immagine inversa di un aperto mediante una funzione continua è un aperto. In probabilità le funzioni misurabili si chiamano *variabili aleatorie* e le si indicano usualmente con le ultime lettere, X, Y,

[1] Il termine "misura" indica che vale la proprietà di additività numerabile

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

se gli insiemi A_n sono in $\mathcal{F}$ e sono a due a due disgiunti $A_j \cap A_k = \emptyset$ se $j \neq k$.

W,…, Z, dell'alfabeto. La ragione di questa terminologia è dovuta al fatto che gli statistici già dalla fine dell'Ottocento chiamavano cosí grandezze suscettibili di assumere valori diversi con date probabilità, e ciò avveniva prima della formalizzazione della teoria delle probabilità negli anni Venti e Trenta del secolo scorso.

Di una variabile aleatoria X si può considerare l'integrale

$$\int X \, d\mathbb{P} \, ,$$

se questo esiste; in tal caso, lo si denota piú brevemente con $\mathbb{E}(X)$. L'insieme delle variabili aleatorie integrabili è indicato con $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Speranze condizionate

Siano dati (a) uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, (b) una variabile aleatoria integrabile, $X \in \mathcal{L}^1$ e (c) una sottotribù $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$, vale a dire una tribù di sottoinsiemi di Ω ogni insieme della quale appartiene anche a $\mathcal{F}$. Si chiama *speranza condizionata* di X, data $\mathcal{G}$, e la si denota con $\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X)$, oppure con $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, la variabile aleatoria, *misurabile rispetto a* $\mathcal{G}$, l'integrale della quale coincide con quello di X quando sia calcolato su un insieme di $\mathcal{G}$:

$$\forall\, B \in \mathcal{G} \qquad \int_B \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X) \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P} \, . \qquad (1)$$

Esiste un teorema, detto di Radon–Nikodym (per il quale si veda, per esempio, [1]), che stabilisce l'esistenza di una variabile aleatoria siffatta e che ne assicura anche l'unicità: se un'altra funzione Y soddisfà alle stesse condizioni, allora l'insieme dei punti nei quali $Y \neq \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X)$ ha probabilità nulla.

Il caso piú semplice di speranza condizionata è illustrato nella Figura 1. Qui la curva in rosso rappresenta una variabile aleatoria continua. Lo spazio è suddiviso in intervalli; le unioni finite di questi intervalli generano una tribù. Si potrebbe dimostrare che la speranza condizionata della variabile aleatoria in figura è necessariamente costante in ciascun intervallo; il valore di tale costante è determinato dalla richiesta che in ogni intervallo sia soddisfatta la condizione di eguaglianza degli integrali in (1). Perché i due integrali siano eguali occorre che in ogni intervallo l'area della regione in grigio *sotto* il grafico eguagli quella della regione in grigio *sopra* il grafico.

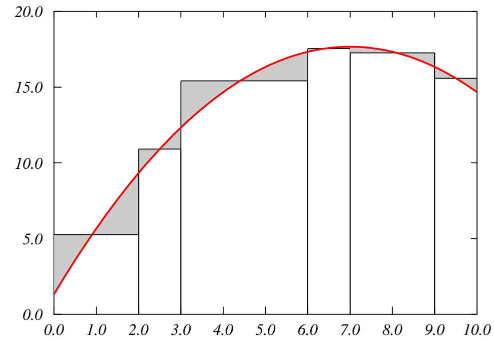

Figura 1: La speranza condizionata rispetto alla tribù generata da una famiglia finita di intervalli.

Non mi soffermo qui sulle proprietà delle speranze condizionate, che pure sono importanti per lo studio delle martingale; il lettore interessato le può trovare in qualunque buon libro di probabilità, per esempio in [16].

Cosa sono le martingale?

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si dice *filtrazione*[2] una successione di tribù $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ tutte contenute in $\mathcal{F}$ e tali che, per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n$ sia contenuta in $\mathcal{F}_{n+1}$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Se si interpreta l'indice n come il tempo (discreto), una filtrazione traduce l'idea dell'accumularsi delle informazioni con il trascorrere del tempo; perciò $\mathcal{F}_n$ sarà una tribù contenuta in $\mathcal{F}_{n+1}$.

Una *martingala* (a tempo discreto) è una successione $(X_n)_{n \geq 0}$ di variabili aleatorie tali che per ogni $n \geq 0$,

(a) X_n sia misurabile rispetto a $\mathcal{F}_n$,

$$\forall\, B \in \mathcal{B} \quad X_n^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n \, ;$$

(b) X_n sia integrabile, $X_n \in L^1$;

(c) $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) = X_n$[3]

[2] Solo in italiano una filtrazione di chiama anche *scala stocastica*.

[3] Qui si $\mathbb{E}_n$ è la versione piú breve della scrittura formale $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$.

Se l'eguaglianza è sostituita da una disuguaglianza si parla di *sotto–martingala* quando $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) \geq X_n$ e di *super–martingala* quando $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) \leq X_n$.

La proprietà (c), che caratterizza le martingale, si può esprimere in maniera (in apparenza) differente, evitando il ricorso al teorema di Radon–Nikodym implicito nella definizione di martingala: per ogni insieme A di $\mathcal{F}_n$ si ha

$$\int_A X_{n+1}\, d\mathbb{P} = \int_A X_n\, d\mathbb{P}\,.$$

Di seguito dò alcuni esempî di martingale in uno spazio di probabilità fissato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; le verifiche dipendono dalle proprietà delle speranze condizionate.

1. Una successione costante $X_n = c$, per ogni $n \geq 0$, è una martingala.

2. Se (X_n) è una successione di variabili aleatorie indipendenti[4] e centrate, vale a dire tali che $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \geq 0$, allora la successione S_n, dove $S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k$, è una martingala.

3. Se X è una variabile aleatoria integrabile, $X \in L^1(\mathcal{F})$ allora (X_n), ove, per ogni $n \geq 0$, $X_n := \mathbb{E}_n(X)$, è una martingala, detta *ereditaria*.

4. Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie integrabili, tutte con speranza diversa da zero, $\mathbb{E}(X_n) = \alpha_n \neq 0$, per ogni $n \geq 0$ e tali che ogni X_n sia misurabile rispetto a $\mathcal{F}_n$; allora la successione

$$Y_n := \prod_{k=0}^{n} \frac{X_k}{\alpha_k}$$

è una martingala, detta *moltiplicativa*.

Le martingale costituiscono uno strumento potente sia per la Probabilità sia per le applicazioni della Probabilità.

Da dove viene il nome?

Di fatto nessuno sa rispondere con certezza alla domanda posta dal titolo di questa sezione. Si può però seguire una storia con qualche indizio.

La rivista *Mathematical Intelligencer* ha dedicato alla questione un articolo ([12]) sul quale tornerò per una fotografia che vi compare. Ancora piú completo è l'articolo in formato elettronico [4].

La parola *martingala* ha diversi significati; si vedano per esempio [7] e [9]:

(a) un tipo di pantaloni indossati da agricoltori e mandriani ([6, 5]);

(b) una danza di marinai;

(c) un termine nautico ([7]): le martingale sono le manovre che, partendo dal bompresso, equilibrano verso il basso la trazione dei fiocchi, passando per un'altra asta detta in italiano pennaccino [14].[5]

(d) una correggia usata per i cavalli ([6, 7, 5, 14]): è una lunga fascia di cuoio che si biforca in due strisce della stessa lunghezza; questa estremità si attacca ai finimenti della bocca del cavallo, mentre si fissa l'altra estremità al pettorale, per evitare che il cavallo alzi troppo la testa.

(e) un sistema di gioco nel quale un giocatore che abbia perso continua a raddoppiare, o a aumentare, la propria scommessa in modo che la prima vincita faccia recuperare le perdite delle scommesse precedenti.

Naturalmente, l'ultimo significato è quello d'interesse per la probabilità. Si deve però notare che in altre lingue la parola assume anche altri significati; per esempio, in Spagnolo il Dizionario della Real Academia [8] dà un significato che non ho trovato in altre lingue: "Artimaña, artificio para engañar"[6]. Ancora un altro significato è riportato dal "Littré"[6]: "Terme de mépris appliqué a une femme"[7].

Secondo i dizionarî il nome deriverebbe dal villaggio di Martigues nella Camargue; pare che gli abitanti della zona avessero fama di essere "ingenui" o "sempliciotti". La prima citazione di questo vocabolo sarebbe in Rabelais [10], *chausses à la martingale*; si tratta di pantaloni indossati da Panurge con un'apertura sul di dietro "per rendere piú facile l'escrezione" e una striscia trasversale che unisse i lembi. Pare che ancora Francesco

[4] Due variabili aleatorie X e Y si dicono *indipendenti* se, per ogni scelta di due boreliani A e B, si ha $\mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)\,\mathbb{P}\left(Y^{-1}(B)\right)$.

[5] Per i non esperti di cose di mare si può consultare il grafico al seguente indirizzo del sito [17] in russo, ma con traduzione in inglese.

[6] Trappola, artificio per ingannare.

[7] Termine di disprezzo rivolto a una donna

I, re di Francia dal 1515 al 1547, li indossasse. Da questo significato deriva il termine tuttora in uso per indicare la striscia di stoffa sul retro di giacche e cappotti, detta, appunto, martingala, oggi forse non piú di moda.

Non è sorprendente che il primo riferimento al termine nel senso di interesse per i matematici sia avvenuto in francese. Sia il "Littré" ([6]) sia il "Robert" ([5]) danno vagamente il diciottesimo secolo come prima comparsa del nome. Come il nome sia passato da indicare pantaloni o una parte dell'equipaggiamento di un cavallo da tiro a una strategia di gioco non è noto. In quest'ultima accezione la parola "martingala" fu impiegata, secondo l'*Oxford Dictionary*, per la prima volta, almeno in inglese, da Thackeray nel 1854 nella frase *You have not played as yet? Do not do so; above all avoid a martingale if you do.*[8] Tuttavia la versione elettronica dello stesso dizionario dà una citazione precedente della parola, nello stesso significato, risalente al 1815 nel *Paris Chit–chat*; non vi è dubbio che qui ci si riferisca a una martingala in un contesto di gioco: "I found him and his Mentor...calculating the infallible chances of a martingale"[9]. Un uso della parola che sembra precedere tutte le citazioni che ho dato sopra e che sembra anche essere sfuggito all'attenzione dei dizionarî che ho citato, si trova nelle memorie di Giacomo Casanova scritte in francese alla fine del Settecento, *Histoire de ma vie*. Il passo in questione è il seguente: "M.M. volle le promettessi che sarei andato al casino per giocare a metà con lei. Ci andai, presi tutto il denaro che trovai e, puntando con il sistema noto ai giocatori come *martingala*, per tutto il periodo del carnevale [del 1754] feci tre o quattro vincite al giorno. Non perdetti mai la sesta carta. Se l'avessi perduta avrei dato fondo a tutto il mio denaro che ammontava a duemila zecchini."[10]

Benché non si possa dire che Casanova abbia "inventato" la parola, egli è, a tutt'oggi, il primo a averla usata per iscritto nel significato di strategia di gioco; il mistero della transizione al significato probabilistico di martingala è cosí spinto un poco indietro nel tempo.

[8] Non avete ancora giocato? Non lo fate; soprattutto evitate una martingala se lo fate.

[9] Ho trovato lui e il suo mentore...cha calcolavano le infallibili probabilità di una martingala

[10] Nell'edizione italiana dei Meridiani citata in bibliografia la citazione compare nel Capitolo XLIV, precisamente a p. 1060; questo corrisponde al volume 4, Cap. VII dell'*editio princeps* Brockhaus–Plon, che, a sua volta, corrisponde al Tomo 3, Troisième fragment del manoscritto di Casanova.

Quello che, sí, conosciamo è il nome del matematico che introdusse il termine *martingala* nel senso oggi usato in Probabilità, e delineato nella sezione precedente, e che per primo lo ha usato sistematicamente: si tratta di Jean Ville (1910–1989), uno studente di Paul Lévy e di Fréchet, che lo introdusse nel 1939 nella sua tesi di dottorato [15]. Per una biografia di Ville si veda [11].

Le martingale divennero uno strumento fondamentale nel campo delle probabilità nei lavori di J.L. Doob a partire dagli anni quaranta del secolo scorso; a lui è dedicata la fondamentale monografia di Dellacherie e Meyer [3], talvolta citata come la "Bibbia celeste" dal colore della copertina; nelle parole di questi autori, Doob *a démontré presque tous les résultats fondamentaux et ...les a utilisés sur tous les champs de bataille du calcul des probabilités, de sorte qu'aucun probabiliste ne peut plus se permettre d'ignorer la théorie des martingales.*[11] Nell'articolo di Snell [12] compare la foto di J.L. Doob che con orgoglio mostra, posata sulla spalla, una... martingala regalatagli da P.R. Halmos, suo primo studente di dottorato che scrisse la tesi proprio sulle martingale. Lo stesso Doob dichiarò nell'intervista a Snell [13] di aver adottato il termine martingala dopo averlo letto nella tesi di Ville che gli era stata inviata perché la recensisse.

[1] H. Bauer: *Probability theory and elements of measure theory.* Academic Press, New York–London (1981).

[2] G. Casanova, *Jacques Casanova de Seingalt Vénitien–Histoire de ma vie*, Édition intégrale, annotation et index dus à A. Hübscher (1897-1985), Brockhaus–Plon, Wiesbaden–Paris, 1960–1962; traduzione italiana *Storia della mia vita*, Introduzione di P. Chiara, a cura di P. Chiara e F. Roncoroni, Vol. 1 (1725–1755), I Meridiani, Mondadori, Milano, 1983.

[3] C. Dellacherie, P.A. Meyer: *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII. Théorie des martingales.* Hermann, Paris (1980).

[11] ...ha dimostrato quasi tutti i risultati fondamentali e ...li ha utilizzati su tutti campi di battaglia del calcolo delle probabilità, di modo che nessun probabilista può piú permettersi d'ignorare la teoria delle martingale.

[4] R. Mansuy: "The Origin of the word Martingale", *Journál électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, Electronic Journal for History of Probability and Statistics* **5** (2009) n^o 1.

[5] *Dictionnaire alphabétique et antologique de la langue française*, Société du nouveau Littré, Paris, 1987.

[6] É. Littré, *Dictionnaire de la langue française*, Paris, 1863–1877; Éditions du Cap, Montecarlo, 1973.

[7] *Oxford English Dictionary*, Oxford University Press, 2000 (anche l'edizione in rete).

[8] *Diccionario de la lengua española*, Real Academia Española, Madrid, 1992 (21–esima ed.)

[9] S. Schwarz, *The words of mathematics. An etimological dictionary of mathematical terms in English.* The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[10] F. Rabelais, *Gargantua*, Juste, Paris, 1534.

[11] G. Shafer: "The education of Jean André Ville", *Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, Electronic Journal for History of Probability and Statistics* **5** (2009) n^o 1.

[12] J. L. Snell: "Gambling, probability and martingales", *Math. Intelligencer* **4** (1982) 629–632.

[13] J. L. Snell: "A conversation with Joe Doob", *Statist. Sci.* **12** (1997) 301–311.

[14] http://www.treccani.it/vocabolario/martingala/

[15] J. Ville: *Étude critique de la notion de collectif.* Gauthier–Villars, Paris (1939).

[16] D. Williams: *Probability with martingales.* Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[17] http://dic.academic.ru/dic.nsf/sea/10897/%D0%9A%D0%9E%D0%A1%D0%AB%D0%95

Carlo Sempi: si è laureato in Fisica a Pavia nel 1970, ha conseguito il Ph.D. in Matematica Applicata a Waterloo, Canadà nel 1974; è poi venuto all'allora Università di Lecce, dove ha percorso tutta la carriera accademica. Nell'ambito della probabilità si interessa di Spazî metrici e normati probabilistici e di teoria delle copule.