La lezione mancata

L'analisi armonica e le serie di Dirichlet

En los lenguajes humanos no hay proposición que no implique el universo entero

Jorge Luis Borges

Rocco Chirivì *Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento*

La simmetria ha un ruolo primario nella compresione delle leggi dell'universo fisico e del mondo matematico. Un esempio di come essa possa unificare discipline diverse come teoria dei numeri, analisi, probabilità e meccanica quantistica è fornito dall'analisi armonica: un metodo che permette di decomporre una funzione in termini di funzioni con simmetrie assegnate.

Nel 1753 Bernoulli, studiando le oscillazioni di una corda con estermi vincolati, osservò che la linearità dell'equazione differenziale che descrive il problema permette di costruire soluzioni sommando le armoniche dell'oscillazione fondamentale con coefficienti arbitrari. Pochi anni prima Eulero aveva provato che le soluzioni dello stesso problema potevano essere espresse tramite coppie di funzioni derivabili qualsiasi. Combinando insieme le due osservazioni si ha che una funzione, alquanto arbitraria, può essere espressa come serie di funzioni seno. A metà del diciottesimo secolo questa conclusione venne considerata paradossale.

Si dovette quindi attendere il 1822 e la pubblicazione del trattato *Théorie analitytique de la chaleur* da parte di Fourier prima che l'analisi armonica venisse accettata. Nasceva così un potente metodo per la soluzioni delle equazioni differenziali che venivano via via proposte per lo studio di vari problemi fisici.

Lo sviluppo in serie di Fourier per funzioni periodiche reali non è, però, il primo esempio di uso dell'analisi armonica. Già Gauss nel suo fondamentale *Disquisitiones arithmeticae*, studiando le forme quadratiche binarie sugli interi, e in particolare nella dimostrazione della legge di reciprocità quadratica, aveva valutato alcune somme di radici complesse dell'unità. E dopo di lui Dirichlet aveva con profitto usato l'analisi armonica per i gruppi ciclici finiti per provare, generalizzando la dimostrazione di Eulero dell'esistenza di infiniti primi, che ogni progressione aritmetica $a, a+m, a+2m, \ldots$, con a e m primi tra loro, contiene infiniti primi.

Bisogna a questo punto notare che, solo nel 1927, Hermann Weyl osservò che questi risultati di Gauss e Dirichlet in teoria dei numeri e lo sviluppo in serie per le soluzioni di alcune equazioni differenziali sono diversi esempi di una stessa idea. Vediamo ora di chiarire, per sommi capi, in quale senso ciò sia vero.

Sia G un gruppo abeliano compatto, gli omomorfismi continui $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sono detti *caratteri* del gruppo. Se, ad esempio, G è la circonferenza unitaria $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$, o equivalentemente con la topologia quoziente di $\mathbb{R}$, allora i caratteri sono le funzioni

$$S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni x \longmapsto e^{2\pi nix} \in \mathbb{C},$$

con n intero qualsiasi. Mentre, se N è un intero positivo e $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, con la topologia discreta, abbiamo i caratteri

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \ni t \longmapsto \zeta^{ht} \in \mathbb{C},$$

dove ζ è la radice primitiva N–esima complessa $e^{2\pi i/N}$ e $h = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Possiamo allora, a costo di una lieve vaghezza, descrivere l'analisi armonica nel seguente semplice modo per un gruppo commutativo compatto. Esiste un'opportuna misura μ su G tale che, per ogni funzione $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sufficientemente regolare, possiamo definire i *coefficienti di Fourier* di f come

$$a_\rho(f) \doteq \frac{1}{\mu(G)} \int_G f(x)\overline{\rho(x)}\,\mu(x)$$

con ρ carattere di G ed avere

$$f(g) = \sum_\rho a_\rho(f)\rho(g), \qquad \text{per ogni } g \in G,$$

espressione che scrive la funzione f come somma pesata dei caratteri di G.

Nel caso particolare di $G = S^1$ abbiamo lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica su $\mathbb{R}$ mentre per un gruppo ciclico otteniamo che una funzione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ di periodo N si scrive come

$$f(n) = \sum_{t=0}^{N-1} a_t(f)\zeta^{nt}$$

dove i coefficienti di Fourier si calcolano come

$$a_t(f) \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\zeta^{-nt}, \quad t = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Osserviamo che sono esattamente queste le somme di radici complesse dell'unità considerate da Gauss e da Dirichlet e richiamate sopra.

L'analisi armonica, così come presentata, può essere definita anche per altri tipi di gruppi. Il punto chiave per questa generalizzazione è la seguente costruzione che cattura l'idea intuitiva di simmetria rispetto ad un gruppo. Chiamamo *rappresentazione* di un gruppo G nello spazio vettoriale complesso V, un omomorfismo continuo $\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}(V)$, dove abbiamo indicato con $\mathsf{GL}(V)$ il gruppo degli isomorfismi lineari di V. In particolare, se $V \simeq \mathbb{C}$ ha dimensione 1 allora $\mathsf{GL}(V) \simeq \mathbb{C}^*$ e ritroviamo la definizione di carattere. Diciamo poi che una rappresentazione è *irriducibile* se $V \neq 0$ e gli unici sottospazi U di V mandati in se stessi da $\rho(G) \subset \mathsf{GL}(V)$ sono $U = 0$ e $U = V$. Per vaste classi di gruppi di significato geometrico è possibile provare che ogni rappresentazione è somma diretta (topologica) di rappresentazioni irriducibili.

Inoltre se il gruppo G è abeliano allora ogni rappresentazione irriducibile è di dimensione 1. Visto che S^1 e $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sono abeliani possiamo pensare ai casi particolari di analisi armonica sopra ricordati come la decomposizione di opportuni spazi di funzioni sul gruppo in termini di rappresentazioni irriducibili; in questo linguaggio, i coefficienti di Fourier danno la proiezione di una funzione sui sottospazi irriducibili (1–dimensionali).

In generale però, se il gruppo G non è commutativo, ci saranno rappresentazioni che non sono di dimensione 1 e, per poter decomporre gli spazi di funzioni su G, bisognerà far intervenire anche tali rappresentazioni. Così, ad esempio, per il gruppo di Lie non commutativo $\mathsf{SO}(3)$ il procedimento sopra delineato fornisce la decomposizione di una funzione sulla sfera come somma di armoniche sferiche; e per questo risultato le rappresentazioni di dimensione maggiore di 1 sono essenziali.

Nel seguito vediamo come l'analisi armonica per le funzioni periodiche su $\mathbb{R}$ e per un gruppo ciclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ possa portare al calcolo di alcuni valori della zeta di Riemann e delle sue generalizzazioni alle serie di Dirichlet. Il nucleo di questo calcolo sono i numeri di Bernoulli e gli associati polinomi di Bernoulli. Infatti le derivate di tali polinomi hanno una cruciale proprietà che permette di scrivere in modo molto semplice alcuni coefficienti di Fourier.

Per ulteriori dettagli storici sulla centralità dell'analisi armonica per la teoria dei numeri, la teoria delle rappresentazioni, la probabilità, l'analisi e la meccanica quantistica rimandiamo il lettore all'interessante saggio di Mackey [2]. Quello che segue è invece un adattamento dell'articolo di Cartier [1] dove è possibile trovare anche altri calcoli simili; come, ad esempio, il calcolo del valore della zeta di Riemann per interi negativi, calcolo che portò Eulero a congetturare l'equazione funzionale, poi dimostrata da Riemann nel suo fondamentale articolo [3]. Invece, per un approccio contemporaneo alla determinazioni dei valori critici delle L–serie, si può guardare l'articolo [4].

Cominciamo con i *numeri di Bernoulli* B_k, con $k \geq 0$, introdotti da Jakob Bernoulli nel 1713, nella sua opera *Ars Conjectandi*, in relazione ad una formula chiusa per la somma delle potenze dei primi numeri interi. Esistono varie definizioni equivalenti, una di esse usa lo sviluppo in serie

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Abbiamo, ad esempio,

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Inoltre tutti i B_k, con k dispari maggiore di 1, sono nulli in quanto la funzione

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$$

è pari. E′ poi possibile provare che vale la seguente relazione ricorsiva

$$B_k = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} B_h.$$

Essa permette di calcolare direttamente i numeri di Bernoulli senza usare lo sviluppo in serie della definizione.

Usando i numeri di Bernoulli definiamo i *polinomi di Bernoulli*

$$B_k(x) \doteq \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} B_{k-h} x^h.$$

E′ chiaro che $B_k(x)$ è un polinomio a coefficienti razionali di grado k. Abbiamo, ad esempio

$$\begin{array}{rcl} B_0(x) & = & 1 \\ B_1(x) & = & x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) & = & x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) & = & x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{array}$$

Usando la relazione ricorsiva riportata sopra per i numeri di Bernoulli è facile provare che valgono le seguenti proprietà:

(a) $B_k(0) = B_k(1)$ per ogni $k \geq 2$ mentre $B_1(1) - B_1(0) = 1$;

(b) la derivata di $B_k(x)$ rispetto ad x è uguale a $kB_{k-1}(x)$ per ogni $k \geq 1$, mentre la derivata di $B_0(x)$ è zero.

Ricordiamo ora i dettagli per lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni periodiche su $\mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione di periodo 1, cioè tale che $f(x+1) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e con solo un numero finito di discontinuità di tipo salto nell'intervallo $[0, 1]$. Per tali funzioni possiamo definire i coefficienti di Fourier come

$$a_n(f) \doteq \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx.$$

Abbiamo allora il seguente sviluppo in serie di Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{2\pi i n x} = f^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove

$$f^0(x) \doteq \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} \left[f(x+t) + f(x-t) \right].$$

Osserviamo che si ha quindi $f^0(x) = f(x)$ in tutti i punti in cui f è continua mentre $f^0(x)$ è la media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità (in numero finito in $[0, 1]$).

Per applicare l'analisi armonica ai polinomi di Bernoulli li rendiamo periodici nel seguente modo

$$\widetilde{B_k}(x) = B_k(x - [x])$$

dove abbiamo indicato con $[x]$ il massimo intero non maggiore di x. Da quanto osservato sopra sui valori di $B_k(x)$ in 0 e 1, possiamo concludere che $\widetilde{B_k}(x)$ è una funzione continua tranne che per $k = 1$ in cui si ha una discontinuità di tipo salto in tutti gli interi.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier di $\widetilde{B_k}(x)$ è molto facile nel caso $k = 1$ essendo $B_1(x)$ un polinomio lineare. Troviamo infatti subito che

$$a_n(\widetilde{B_1}) = \begin{cases} -(2\pi i n)^{-1} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Per lo stesso calcolo in generale ricordiamo prima una relazione tra i coefficienti di Fourier di una funzione e della sua derivata. Se una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è derivabile e f e la sua derivata sono del tipo considerato sopra, allora, usando l'integrazione per parti, ricaviamo

$$a_n(f) = \frac{f(1) - f(0)}{-2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n} a_n(\frac{df}{dx}).$$

Applicando questa relazione alle funzioni periodiche $\widetilde{B_k}(x)$ e usando le proprietà (a) e (b) sopra riportate abbiamo

$$a_n(\widetilde{B_k}) = \begin{cases} -k!(2\pi i n)^{-k} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Ma allora lo sviluppo in serie di Fourier di $\widetilde{B_k}(x)$ ci dice che

$$\widetilde{B_k}(x) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se specializziamo k ad un intero pari positivo $2m$ e valutiamo in $x = 0$ otteniamo

$$\zeta(2m) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m},$$

formula che esprime il valore della zeta di Riemann per i pari positivi in termini dei numeri di Bernoulli.

Ad esempio troviamo i seguenti valori per i primi pari positivi

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Se invece proviamo a specializzare ad un intero dispari ritroviamo solo che $B_k = 0$ per k dispari maggiore di 1, questo in quanto le somme sugli interi positivi e negativi della serie a destra si annullano a vicenda. Ritroveremo ancora in seguito questo diverso comportamento per i valori sui pari e sui dispari.

Quanto visto sulle funzioni periodiche $\widetilde{B_k}(x)$ può essere usato anche per calcolare i valori delle serie di Dirichlet. Nel contesto che a noi interessa possiamo definire tali serie nel seguente modo.

Sia N un intero positivo fissato e sia $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione di periodo N, cioè tale che $\chi(n + N) = \chi(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Ad ogni funzione periodica χ associamo la *serie di Dirichlet*

$$L_\chi(s) \doteq \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

E' possibile provare che $s \longmapsto L_\chi(s)$ è ben definita per ogni complesso s con parte reale maggiore di 1 e si estende ad una funzione meromorfa su tutto $\mathbb{C}$ con al più una singolarità polare semplice in 1.

Osserviamo che per la funzione $\mathbb{Z} \ni n \longmapsto 1 \in \mathbb{C}$, di periodo 1, ritroviamo la zeta di Riemann come caso particolare di una serie di Dirichlet.

Ricordiamo ora che, come visto sopra, se $\zeta \doteq e^{2\pi i/N} \in \mathbb{C}$, una radice primitiva N–esima dell'unità, ad una funzione $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ di periodo N, possiamo associare i coefficienti di Fourier $a_t(\chi)$, con $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, così definiti

$$a_t(\chi) \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi(n) \zeta^{-nt}.$$

ed avere, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$,

$$\chi(n) = \sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) \zeta^{nt}.$$

Usiamo ora l'espressione dei polinomi di Bernoulli come serie di Fourier per calcolare alcuni valori delle serie di Dirichlet. Abbiamo infatti l'identità

$$\sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) B_k(\frac{t}{N}) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n \neq 0} \frac{\chi(n)}{n^k}.$$

Se assumiamo anche che la parità di k e la funzione χ siano tali che $\chi(-n) = (-1)^k \chi(n)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, possiamo ricavare

$$L_\chi(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} \sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) B_k(\frac{t}{N}).$$

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo con la formula appena dimostrata.

Sia $N = 3$ e consideriamo il carattere definito da $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$ e $\chi(2) = 1$. Osserviamo che $\chi(-n) = \chi(n)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi la nostra formula può essere usata per calcolare il valore di $L_\chi(k)$ per k pari; prendiamo ad esempio $k = 2$. I coefficienti di Fourier del carattere χ si calcolano subito come

$$\begin{aligned} a_0(\chi) &= 2/3 \\ a_1(\chi) &= (\zeta^{-1} + \zeta)/3 = -1/3 \\ a_2(\chi) &= (\zeta + \zeta^{-1})/3 = -1/3 \end{aligned}$$

inoltre, visto che $B_2(x) = x^2 - 1/2x + 1/6$ abbiamo subito

$$\begin{aligned} B_2(0) &= 1/6 \\ B_2(1) &= -1/18 \\ B_2(2) &= -1/18. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + 2(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{18}) = -\frac{2 \cdot 2}{(2\pi i)^2} L_\chi(2)$$

da cui

$$L_\chi(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{4}{27}\pi^2$$

Questo valore può anche essere calcolato, in modo più elementare, come

$$L_\chi(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{27}\pi^2.$$

Vediamo ora un esempio per $N = 4$. Consideriamo il carattere definito da $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$, $\chi(2) = 0$ e $\chi(-1) = -1$. Osserviamo che per tale χ la serie di Dirichlet è a segni alterni con termine generale infinitesimo e, visto che $\chi(-n) = -\chi(n)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, possiamo quindi prendere $k = 1$ nella nostra formula. I coefficienti di Fourier di χ sono subito calcolati come

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -i/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= i/2 \end{aligned}$$

e per i valori del polinomio di Bernoulli B_1 abbiamo $B_1(1/4) = -1/4$ e $B_1(3/4) = 1/4$. Ricaviamo quindi il valore

$$L_\chi(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Tale formula era già nota a Leibniz.

Ancora un ultimo esempio con $N = 4$ e lo stesso carattere χ definito sopra; calcoliamo la serie di Dirichlet in $k = 3$. Per i relativi polinomi di Bernoulli abbiamo $B_3(1/4) = 3/64$ e $B_3(3/4) = -3/64$. Ricaviamo quindi che vale

$$L_\chi(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

[1] P. Cartier. *An introduction to zeta functions.* In *From number theory to physics*. Editors M. Waldschmidt, P. Moussa, J.–M. Luck, C. Itzykson, 1992, Springer–Verlag.

[2] G. W. Mackey. *Harmonic analysis as the explotation of symmetry – A Historical survey.* Bullettin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 3, Number 1, July 1980, 543–698.

[3] B. Riemann. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* 1859.

[4] D. Zagier. *Values of zeta functions and their applications*. First European Congress of Mathematics, Volume II, Progress in Math. 120, Birkhäuser-Verlag, 1994 497–512.

Rocco Chirivì: Laureato in matematica all'università di Pisa e alla Scuola Normale Superiore. Ha conseguito il dottorato di ricerca presso la Scuola Normale Superiore. E' stato ricercatore in Algebra alla Sapienza di Roma e all'università di Pisa. Da maggio 2012 è ricercatore presso il dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento. Si occupa di teoria delle rappresentazioni di algebre e gruppi di Lie.