Riflessioni sulle riflessioni

Ora vediamo come in uno specchio, in immagine; ma allora vedremo a faccia a faccia.

(1 Cor 13,12)

Giuseppe De Cecco *professore in pensione dell'Università del Salento*

Esistono concetti matematici fondamentali che pervadono la nostra vita e scopo dell'insegnamento attivo è quello di riconoscerli e trasmetterli. Qui si prendono in considerazione le simmetrie speculari in matematica, che schematizzano la relazione che intercorre tra i punti di un oggetto e quello della sua immagine rispetto ad uno specchio piano.

Faremo le nostre considerazioni nel piano euclideo E. Se r è una retta di E, indichiamo con $\sigma_r : E \longrightarrow E$ la *simmetria (ortogonale) rispetto ad* r o anche *simmetria assiale di asse* r (o *ribaltamento intorno ad* r), che, come è noto, associa al punto P di E il punto $P' = \sigma_r(P)$ tale che il segmento PP' sia ortogonale ad r e il suo punto medio appartenga ad r (cioè si riporta una stessa misura da una parte e dall'altra della retta r, come suggerisce la parola greca $\sigma\upsilon\mu - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$).

Assumendo r come asse x e una retta ortogonale ad r come asse y, al punto $P(x, y)$ corrisponde il punto $P'(x, -y)$; quindi le equazioni canoniche di σ_r sono

$$x' = x, \qquad y' = -y.$$

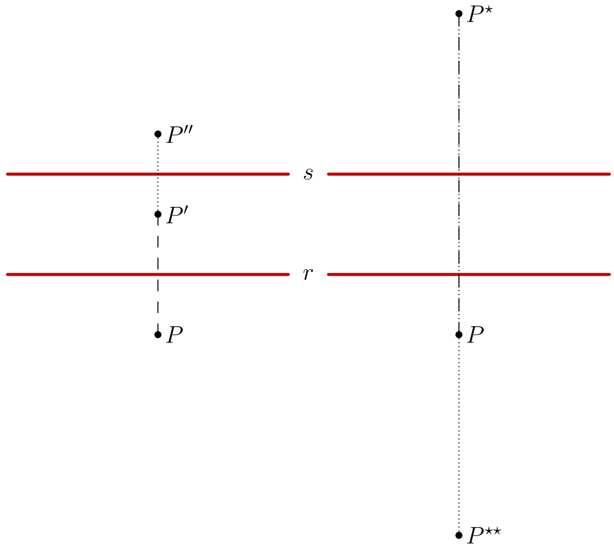

Figura 1

L'applicazione σ_r è una *isometria* (o *congruenza*), cioè conserva le distanze e quindi tutte le proprietà metriche del piano; inoltre essa è una *isometria inversa*, poiché inverte l' orientazione. Si vede facilmente che $\sigma_r^2 = id$ (cioè σ_r è un'applicazione involutoria e quindi $\sigma_r^{-1} = \sigma_r$) e $\sigma_r|r = id$ (cioè i punti di r rimangono fissi) [1]; dunque r

[1] Il simbolo id indica l'applicazione identica, cioè $id(P) = P$; σ_r^2 indica che l'applicazione σ_r è iterata due volte; $\sigma_r|r$ indica la restrizione dell'applicazione ai punti di r,

Lo specchio

Le proprietà geometriche dello specchio hanno sempre affascinato piccoli e grandi fin dai primordi dell'umanità, a causa anche della sostanziale ambiguità dello specchio: riproduzione immediata dell'immagine, ma immagine *virtuale* (non vera). Specchi naturali sono gli "specchi" d'acqua, cioè superfici calme di acqua; a rigore ogni superficie perfettamente liscia (cioè priva di irregolarità) di qualsiasi materiale è riflettente.
Il simbolismo dello specchio si trova, poi, nelle grandi costruzioni mentali, allegoriche e letterarie delle varie epoche, dai miti orientali e greci fino alle moderne antenne dei satelliti che realizzano il sogno di Pitagora di usare la luna come grande specchio per comunicare tra due punti della terra. In questo senso "moderni" specchi sono il televisore, che permette il trasferimento simultaneo dell'immagine riflessa, e l'elaboratore elettronico, che permette la ricostruzione di immagini.
La conoscenza ha nello specchio il suo mediatore privilegiato: la parola "speculazione" porta in sé il ricordo dello specchio (*speculum* in latino); infatti in origine "speculare" era osservare il cielo e i movimenti delle stelle servendosi di uno specchio, da cui anche "considerare", guardare l'insieme delle stelle (*sidus-eris*) per ricavare gli auspici. Anche l'accezione della parola "riflettere", nel senso di riverberare il pensiero, rivolgere la mente a qualcosa, secondo alcuni ricorda la riflessione (fisica) sull'anima, considerata come uno specchio d'acqua.
La stessa arte (di qualsiasi tipo) è stata definita da molti *specchio del reale*; in quella pittorica poi i motivi ornamentali, i fregi, le pavimentazioni sono legate alla riflessioni speculari e quindi sono anche oggetto di studio della matematica.

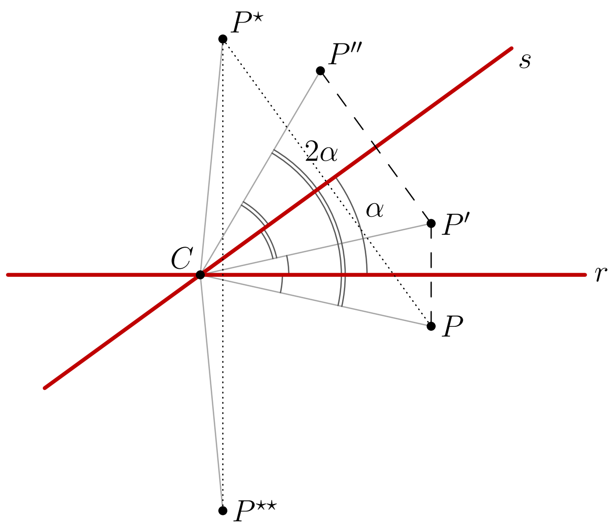

Figura 2

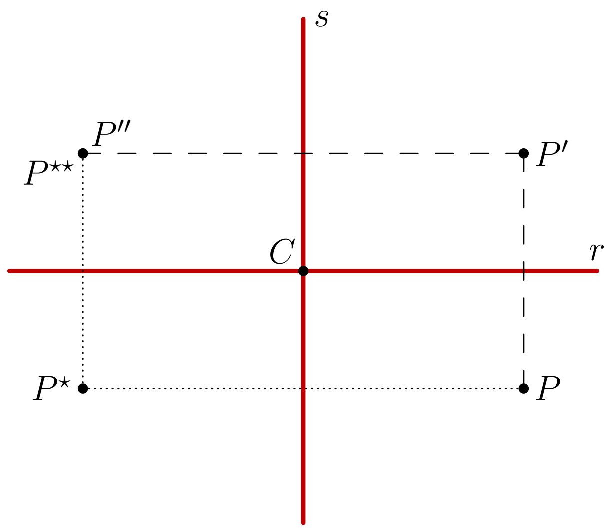

Figura 3

funziona da *specchio* [1, 2, 3].

Se il nostro ambiente è una retta, lo "specchio" sarà un *punto*; se l'ambiente è lo spazio tridimensinale lo "specchio" sarà un *piano*.

Se r ed s sono due rette parallele, allora $\sigma_s \circ \sigma_r$ è una *traslazione* nella direzione ortogonale ad r e ad s di ampiezza $2d$ dove d è la distanza tra r e s. Si osservi che $\sigma_s \circ \sigma_r \neq \sigma_r \circ \sigma_s$ come si vede facilmente dalla Figura 1 [2].

Infatti

$$\begin{aligned} \sigma_s(\sigma_r(P)) &= \sigma_s(P') = P'', \\ \sigma_r(\sigma_s(P)) &= \sigma_r(P^\star) = P^{\star\star}. \end{aligned}$$

quindi $\sigma_r|r = id$ significa $\sigma_r(P) = P$ per ogni punto P di r.

[2]Il simbolo $\circ$ indica la composizione di applicazioni, cioè $(\sigma_s \circ \sigma_r)(P) = \sigma_s(\sigma_r(P))$.

Il gruppo quadrinomio

Se le rette r ed s sono ortogonali, indicata per semplicità con e l'identità, si verifica facilmente che le applicazioni

$$\{e, \sigma_r, \sigma_s, \sigma_C\} = \mathcal{V}$$

rispetto alla composizione tra applicazioni, costituiscono un *gruppo*, chiamato *gruppo quadrinomio* o anche *Vierergruppe*, termine introdotto da F. Klein, che per primo ha attirato l'attenzione su di esso nel 1884 nel libro *Vorlesungen über das Ikosaeder*. La tabella di moltiplicazione, (*tavola pitagorica)*, è la seguente

$\circ$	e	σ_r	σ_s	σ_c
e	e	σ_r	σ_s	σ_c
σ_r	σ_r	e	σ_c	σ_s
σ_s	σ_s	σ_c	e	σ_r
σ_c	σ_c	σ_s	σ_r	e

Quindi geometricamente il gruppo quadrinomio rappresenta il gruppo delle isometrie di un rettangolo. Indicando con 1, 2, 3, 4 i vertici di un rettangolo ed usando il simbolismo delle permutazioni si ha

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = \eta, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \sigma, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \rho\sigma = \sigma\rho.$$

Quindi $\mathcal{V}$ si può pensare anche generato dagli elementi ρ e σ soddifacenti alle seguenti condizioni

$$\eta^2 = e, \qquad \sigma^2 = e, \qquad \eta\sigma = \sigma\eta.$$

Questo gruppo (abeliano) può essere "visualizzato" mediante due specchi ortogonali r ed s (Figura 4).

Se, invece, $r \cap s = \{C\}$, allora $\sigma_s \circ \sigma_r$ è una *rotazione* intorno a C di ampiezza 2α dove $\alpha = rs$ è l' angolo orientato da r ad s. Anche in questo caso, in generale $\sigma_s \circ \sigma_r \neq \sigma_r \circ \sigma_s$ (Figura 2). In simboli

$$\begin{aligned}\sigma_s \circ \sigma_r &= \rho(C, 2\alpha)\\ \sigma_r \circ \sigma_s &= \rho(C, 2\pi - 2\alpha)\end{aligned}$$

dove $\rho(C, \phi)$ indica la rotazione intorno a C di un angolo ϕ.

Si ha l'uguaglianza $\sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \sigma_s$ se e solo se le rette r ed s sono ortogonali, allora $\sigma_s \circ \sigma_r$ è la simmetria centrale di centro C, in simboli $\sigma_C = \rho(C, \pi)$ (Figura 3).

Poiché i movimenti piani sono traslazioni, rotazioni, ribaltamenti o loro composizioni, ne segue che:

Teorema 1. *Le simmetrie assiali generano il gruppo $\mathcal{E}(2)$ delle isometrie del piano.*

Anzi si può provare che:

Teorema 2. *Ogni isometria piana è prodotto al più di 3 simmetrie assiali.*

Questo è un classico teorema di fattorizzazione; inoltre per ogni decomposizione di una data isometria in un prodotto di simmetrie, il numero dei fattori conserva la propria *parità*: le *congruenze dirette* sono ottenibili come prodotto di un numero pari di simmetrie e quindi conservano l'orientazione; le *congruenze inverse* sono ottenibili come prodotto di un numero dispari di simmetrie e quindi invertono l'orientazione.

Le traslazioni e le antitraslazioni (composizione di una traslazione con una simmetria assiale) non hanno punti fissi, le rotazioni hanno un punto fisso, i ribaltamenti infiniti punti fissi.

Dal punto di vista gruppale, una simmetria assiale genera un sottogruppo di ordine 2 di

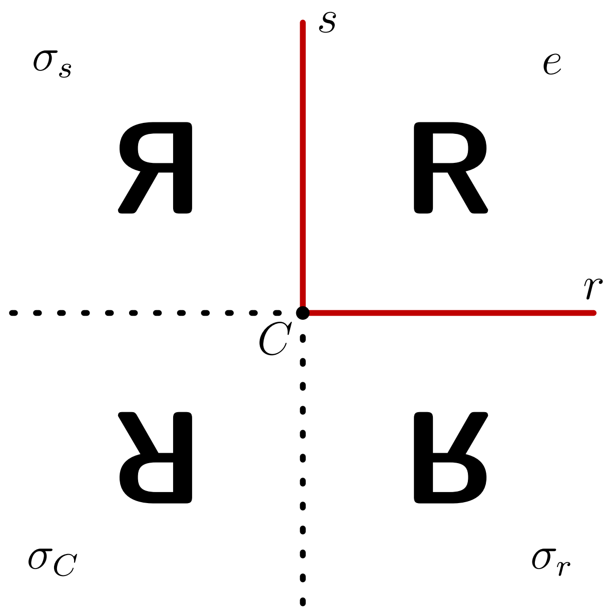

Figura 4

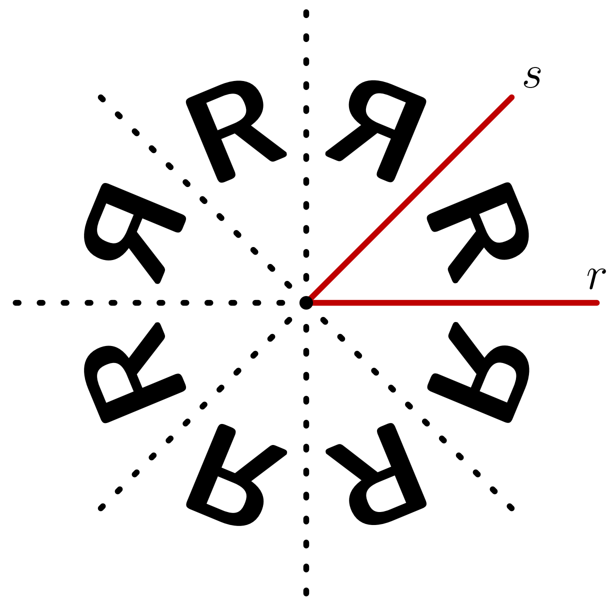

Figura 5

$\mathcal{E}(2)$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$; le traslazioni costituiscono un sottogruppo (commutativo) normale di $\mathcal{E}(2)$, isomorfo ad $\mathbb{R}^2$, essendo le traslazioni in corrispondenza biunivoca con i vettori del piano (che individuano la traslazione). Le rotazioni (intorno ad un fissato punto) costituiscono un sottogruppo (commutativo) di $\mathcal{E}(2)$ isomorfo alla circonferenza: infatti

$$\rho(C, \vartheta) \circ \rho(C, \vartheta') = \rho(C, \vartheta + \vartheta').$$

Ricordiamo che se g è un elemento di un gruppo, si chiama *periodo* (o *ordine*) di g il minimo intero positivo n per cui $g^n = e$. Quindi una rotazione $\rho(C, \alpha)$ ha periodo $n \in \mathbb{N}$, se

$$n\alpha = 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

essendo $\rho(C, 2\pi k) = id$. Quindi

$$periodo \quad n \quad finito \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$$

In tal caso, posto per semplicità $\rho(C, \alpha) = \rho$

$$\{\rho, \rho^2, ..., \rho^n = e\} = \mathcal{C}_n$$

è il un sottogruppo (discreto) del gruppo delle rotazioni intorno al punto C e si può interpretare come il gruppo delle rotazioni piane intorno al centro di un poligono regolare di n lati.

Se $(2\pi/\alpha)$ è irrazionale, allora $\rho(C, \alpha)$ ha periodo infinito.

Poiché il gruppo $\mathcal{E}(2)$ delle isometrie è generato dalle simmetrie assiali, la trattazione elementare della geometria elementare ordinaria può essere sviluppata sistematicamente partendo dalle simmetrie assiali [5].

Il rinnovamento dell'insegnamento della geometria in Italia [6] fondato sulla simmetria è stato portato avanti da U. Morin e sviluppato in un testo di L. Lombardo Radice e L. Mancini Proia [7]. Questi autori mettono pure in evidenza che quel modo elegante ed efficace di introdurre e studiare i movimenti è stato trovato piuttosto tardi, cioè soltanto nel XX secolo dal danese L. Hjielmslev e portato a perfezione dal tedesco F. Bachmann nel 1959. Questo risultato può essere giustificato dal fatto che il "prodotto operatorio" di trasformazioni è stato introdotto in matematica solo nel XIX secolo, quando si andò formando la nozione di gruppo.

Il concetto di simmetria si incontra dappertutto: in natura (uomo, animali, cristalli, fiori,...), nelle scienze (matematica, fisica, chimica, biologia,...) in arte (pittura, architettura, musica, letteratura,...), nelle relazioni sociali (si pensi alla legge *talis qualis*); è una sorta di criterio di semplificazione [5, 8, 9, 10, 11, 12]. In un'accezione più ampia, è chiamata anche "simmetria (speculare)" la corrispondenza tra una teoria, una visione del mondo, e la realizzazione storica, concreta, anche attraverso opere dell'ingegno, di quella teoria.

Secondo Vitruvio (I sec. a.C.)

Il gruppo diedrale

Due specchi r ed s formanti un angolo diedro $\alpha = \pi/n$ con $n \in \mathbb{N}$ possono essere utili strumenti per "visualizzare" il gruppo generato da σ_r e σ_s, isomorfo al *gruppo diedrale* $\mathcal{D}_n$, costituito da tutti i movimenti del piano che portano in sé un poligono regolare di n lati; esso ha $2n$ elementi, cio è si producono $2n$ immagini ($n = 2$ nella Figura 4, $n = 4$ nella Figura 5).
Se α è incommensurabile con π, allora abbiamo infinite immagini di un punto, tutte giacenti su una stessa circonferenza.
Se r ed s sono parallele, il gruppo generato da σ_r e σ_s (indicato spesso con $\mathcal{D}_\infty$) ha infiniti elementi: questo gruppo è utilizzato nello studio dei *fregi*, cioè dei motivi ripetuti ad intervalli regolari su una retta (Figura 6).
Intuitivamente possiamo dire che il *grado di simmetria* di una figura $X \subset E$ è "misurato" dal *gruppo di simmetria* $\mathcal{S}(X)$ della figura stessa, dove $\mathcal{S}(X)$ è il gruppo delle isometrie di E che portano in sé la figura X (che rimane fissa).
Per esempio consideriamo un triangolo X. Se X è *scaleno*, allora $\mathcal{S}(X)$ è costituito solo dall'identità e; se X è *isoscele*, allora $\mathcal{S}(X) = \{e, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$, dove σ è la simmetria bilaterale rispetto alla mediana; se X è *equilatero*, allora

$$\mathcal{S}(X) = \{\rho, \rho^2, \rho^3 = e, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\} \cong \mathcal{D}_3,$$

dove ρ è la rotazione di $2\pi/3$ intorno al centro (= incentro = circocentro) del triangolo equilatero (ancora ρ).
Quindi tra i triangoli, quello equilatero è il più simmetrico e in un certo senso anche il più bello! *La bellezza è intimamente legata alla simmetria* - scriveva H. Weyl (1885-1955) [4], che ha studiato accuratamente le basi matematiche della simmetria, collegandole anche all'arte e alla filosofia. Gli uomini, infatti, preferiscono istintivamente la regolarità.

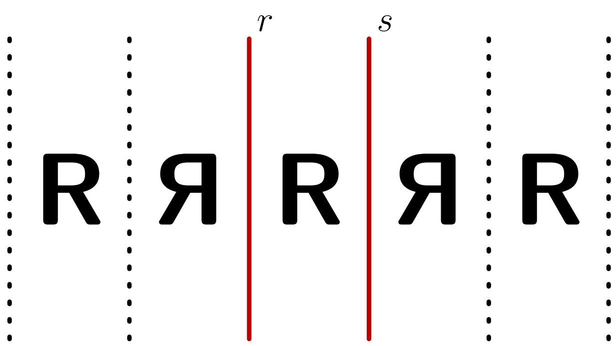

Figura 6

> *La simmetria risulta dalla proporzione, la quale è commisurazione tra il tutto e le varie parti che lo costituiscono.*

Questo desiderio di simmetria in arte è spesso sinonimo d'armonia, come dice il famoso architetto Le Corbusier (1887-1965):

> *L'armonia è la felice coesistenza delle cose, coesistere implica una presenza duplice o multipla, e per conseguenza si riferisce ai rapporti e agli accordi; ma di quali accordi dobbiamo interessarci? Dell'accordo tra noi e il nostro ambiente, tra lo spirito dell'uomo e lo spirito delle cose, tra la matematica che è scoperta umana e la matematica che è il segreto del mondo.*

Ma la simmetria in senso lato può tradursi anche in antitesi profonde, (collegate anche all'ambiguità dello specchio): destro-sinistro, passato-futuro, vero-falso, razionale-irrazionale. In effetti lo specchio non scambia la destra con la sinistra, ma il fronte con il retro, poichè esso scambia l'orientazione delle rette ortogonali al piano dello specchio. Secondo il matematico e noto divulgatore scientifico M. Gardner (1914-2010) (ma non tutti gli studiosi sono d'accordo con la sua spiegazione)

> *uno specchio, se gli state di fronte, non mostra alcuna preferenza per l'alto ed il basso o per la destra o la sinistra. Rovescia la struttura di una figura, punto per punto, lungo le rette ad esso ortogonali. Una tale inversione trasforma automaticamente una figura nella sua enantiomorfa.*

La matematica è stata e sta sempre più diventando il mezzo per eccellenza atto ad approfondire lo studio delle simmetrie intese in senso lato, onde i suoi risultati - anche se conseguiti unicamente come diceva C.G. Jacobi (1804-1851), ≪per l'onore dello spirito umano≫ - vengono ad avere altissime doti sia estetiche che culturali. (...) Si può quindi presumere che dai comuni progressi della matematica, e da una più diffusa ed approfondita conoscenza di questa da parte dei non specialisti in materia, avrebbero, a breve o lunga scadenza, a derivarne nuovi rigogliosi sviluppi nei più disparati rami dello scibile e ciò non soltanto per quanto concerne le scienze fisiche e naturali e la tecnologia, ma altresì nei confronti dell'arte e, forse, perfino della filosofia. (B. Segre)

Conferma il filosofo:

Attraverso la simmetria, noi possiamo entrare nell'universo, nel mondo nella sua totalità e trovare in esso un ordine che risponde, appunto all'anima stessa dell'universo. (U. Spirito)

A causa della nostra simmetria bilaterale troviamo conveniente descrivere il fenomeno con uno scambio destra-sinistra. È solamente un modo di dire, una convenzione linguistica [13].

Alcune simmetrie sono imposte dall'opera dell'uomo, altre si producono spontaneamente in natura: i cristalli hanno simmetria a reticolo, il virus della poliomelite ha la forma di un icosaedro, la molecola del metano quella di un tetraedro. Il matematico e biologo britannico D'Arcy Thompson (1860-1948) studiò [14] la simmetria degli organismi in sviluppo, osservando che

la simmetria è altamente caratteristica delle forme organiche e manca solo di rado negli organismi viventi.

Inoltre le configurazioni di equilibrio nella dinamica evolutiva posseggono spesso simmetrie.

Anche varie leggi di dualità che si incontrano, non solo in matematica, possono essere pensate come processo di simmetrizzazione nel modo di pensare. Inoltre il concetto di simmetria, con le sue condizioni di conservazione nella ripetizione – come dice l'epistemologo E. Agazzi [1] –

appare come il prototipo di ogni conoscenza razionale che, ad ogni livello, si configura come una certa ricerca dell'identità nel diverso, la quale non può essere altro che una forma di identità strutturale e quindi, in senso lato, una simmetria.

Nelle scienze questo si traduce nell'invarianza rispetto a qualche trasformazione. Come è noto, tutte le trasformazioni che lasciano invarianti le proprietà geometriche fondamentali formano gruppo; invertendo questo rapporto tra gruppo e geometria, F. Klein (1849-1925) ha definito che cos'è "una" geometria ed ha chiarito come si possono subordinare le diverse geometrie. Da questo punto di vista si potrebbe dire che ogni geometria è la rappresentazione di simmetrie.

I problemi di riflessione risolvono anche problemi di minimo, poiché la luce in un mezzo omogeneo si propaga in linea retta (secondo il noto principio di Fermat: la luce segue il cammino di minima lunghezza ottica). Perciò le simmetrie speculari possono essere usate come strumento ausiliario in tanti problemi di minimo: ad es. geodetiche, percorsi luminosi, rimbalzo per palle di biliardo, moti ergodici [3, 15].

Le diverse scienze non debbono essere viste come perni di una macchina, ma piuttosto come rami dell'albero della sapienza ed acquistano valore nella misura in cui le sentiamo legate al tronco da cui traggono e a cui danno alimento; anche nel caso della matematica, penso che il suo successo derivi dalla capacità di ogni insegnante, di ogni ricercatore di comunicare al pubblico il senso di questo legame.

Ennio De Giorgi

[1] E. Agazzi: *La simmetria : Seminario interdisciplinare di Venezia.* Il Mulino, Bologna (1973).

[2] G. Choquet: *L'insegnamento della geometria: introduzione e traduzione di A. Pescarini.* Feltrinelli, Milano (1994).

[3] I. M. Jaglom: *Trasformazioni geometriche. Le isometrie.* Zanichlelli, Bologna (1972).

[4] H. Weyl: *La simmetria.* Feltrinelli, Milano (1952).

[5] A.A. V.V.: *Simmetrie.* Atti di un simposio tenuto a Roma (9-11 marzo 1969), Acc. Naz. Lincei, Quaderno 136, Roma (1970).

[6] G. Prodi: *Matematica come scoperta.* Guida al progetto d'insegnamento della Matematica, Vol. I e II, Ed. G. D'Anna, Firenze (1978).

[7] L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia: *Il metodo matematico nel mondo moderno. Per le Scuole. Vol. 1, 2, 3.* Principato (1988).

[8] R. Betti, E. Marchetti, L. Rossi Costa (a cura di): *Simmetria: una scoperta matematica.* Polipress, Politecnico di Milano (2007).

[9] E. Castelnuovo, M. Barra: *Matematica nella realtà.* Boringhieri, Torino (1976).

[10] M. Dedò: *Forme, simmetria e topologia.* Zanichelli, Bologna (1999).

[11] M. Emmer: *La perfezione visibile.* Theoria, Roma-Napoli (1991).

[12] I. Stewart, M. Golubitsky: *Terribili simmetrie.* Bollati Boringhieri, Torino (1995).

[13] M. Gardner: *L'universo ambidestro.* Zanichelli, Bologna (1984).

[14] W. D'Arcy Thompson: *Crescita e forma.* Boringhieri, Torino (1969).

[15] H. Steinhaus: *Matematica per istantanee.* Zanichelli, Bologna (1994).

Giuseppe De Cecco: è stato professore ordinario di Geometria nell'Università del Salento, dove ha insegnato per circa quaranta anni. Ha tenuto numerosi corsi di tipo diverso, privilegiando sempre l'aspetto interdisciplinare, anzi transdisciplinare, alla ricerca del terreno comune in cui ogni disciplina affonda le sue radici. Le sue ricerche sono in Geometria differenziale, Topologia algebrica ed Analisi globale, in particolare sulle varietà riemanniane con singolarità.