Un matematico errante del basso Medioevo: Leonardo Pisano (*il Fibonacci*)

Vincenzo Flaminio *INFN, Sez. di Lecce*

Si è tenuta a Pisa, dal 23 al 26 Novembre 2023, una serie di iniziative per ricordare un grande matematico, Leonardo Pisano, noto come "il Fibonacci". In una precedente celebrazione (20-23 Novembre 2020) era stata rievocata, sempre a Pisa, la figura di Fibonacci nell'850-mo anniversario della nascita. Nella celebrazione del 2023 sono stati rievocati molti eventi e connessioni tra la matematica di Leonardo Pisano e le attività di numerosi artisti e scienziati. Nel campo musicale sono stati ricordate le connessioni tra Lucio Battisti e la matematica di Fibonacci. Nel campo della matematica, la figura di Leonardo Pisano è stata rievocata dal Prof. Franco Ghione, Ordinario di Matematica presso l'Università di Roma "Tor Vergata". Il Prof. Ghione ha tenuto un seminario dal titolo: "La matematica che trasformò il mondo: il *liber abaci* di Leonardo Pisano". Mi propongo in questo scritto, di riassumere alcuni dati sulla vita e su alcuni degli importanti contributi che Fibonacci ha dato allo sviluppo della matematica in Europa. Mi limiterò a pochi aspetti della sua opera, visto che esiste, sulle opere di Fibonacci, una impressionante mole di libri, scritti e documenti, sopratutto in Europa e Stati Uniti. In tempi recenti un film-documentario è inoltre stato girato in Italia [1]. Lo scopo di questo scritto non è, né potrebbe essere, un compendio delle opere di Fibonacci, è molto più limitato e modesto. È quello di richiamare l'attenzione sulle opere di Fibonacci e sulla teoria dei numeri, di cui è stato un grande precursore. La bibliografia che ho via via menzionato potrebbe essere d'aiuto.

Introduzione

Il nome francese per la candela è Bougie. L'origine del nome viene dal nordafrica, più precisamente dall'Algeria. Quella che in Francia si chiama Bugie (Bejaia in Algeria, Bugia in Italia, Saldae in Latino) è una graziosa città che ha oggi

Figura 1: Statua di Fibonacci nel camposanto monumentale di Pisa.

Figura 2: Fibonacci ai suoi tempi. Disegno tratto dall'opera I benefattori dell'umanità; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850.

circa 160.000 abitanti. È situata in Algeria, circa 180 kilometri ad est di Algeri. È un notevole polo industriale, con un porto che rappresenta un'importante scalo petrolifero e commerciale sul Mar Mediterraneo. La città è dotata di un aeroporto internazionale e di una importante Università. Nel medioevo era anche conosciuta per la produzione di candele fatte di cera d'api (da cui il nome). Altre attività industriali presenti a quei tempi a Bejaia erano quelle delle pelli, delle pellicce e dei filati. Aveva una popolazione di alcune decine di migliaia di abitanti nel basso medioevo. Sopratutto Arabi Andalusi e Berberi Cabili.

Non si sa molto circa la vita di Fibonacci, al di là dei pochi fatti descritti nelle sue opere matematiche [2].

Quando era ancora ragazzo suo padre Guglielmo, un mercante pisano, fu nominato rappresentante dei Pisani (forse oggi diremmo Addetto Commerciale) [1] presso la comunità dei mercanti Pisani nel porto nordafricano di Bugia. Testimonianza dell'attività della comunità Pisana in Algeria nel medioevo è la presenza in quell'area di quella che è nota come "Isola dei Pisani".

Figura 3: Isola dei Pisani. L'isola dei Pisani è un'isola algerina che si trova davanti all'abitato di Boulimat nel territorio comunale di Bejaia.

Fibonacci (nome da alcuni inteso come: Filius Bonaccii, da cui il nome Fibonacci) visse con suo padre in Algeria e fu mandato a studiare matematica presso un professore arabo. Il padre avrebbe voluto che Leonardo divenisse un mercante. A tale scopo ritenne opportuno che il figlio si impratichisse con le tecniche di calcolo che erano adoperate nei paesi con cui eran soliti commerciare. Fu quindi incoraggiato a viaggiare in Egitto, in Siria, in Grecia, in Sicilia ed in Provenza, dove apprese diversi sistemi numerici e metodi di calcolo. Queste esperienze lo aiutaro-

[1] Guglielmo era *"publicus scriba pro pisanis mercatoribus"*.

no nella sua formazione matematica e nel calcolo commerciale. [2]

Fibonacci constatò abbastanza presto che il sistema numerico Indo-Arabo offriva molti vantaggi, visto che era adoperato dalla grande maggioranza dei mercanti che incontrò nel corso dei suoi viaggi d'affari. Va detto che in realtà il sistema numerico indo-arabo era già noto nella Spagna dell'ottavo secolo, anche se poco adoperato.[3] In un manoscritto del 976, copia di un precedente documento, effettuata dal monaco Vigila, costui scrive:

> "Dobbiamo sapere che gli indiani hanno un ingegno sottilissimo e superano tutti gli altri popoli nell'aritmetica, nella geometria e nelle altre arti liberali. Ciò emerge chiaramente nelle nove cifre di cui si servono per indicare gli altri numeri, di qualunque ordine e grandezza . . . ".

È forse opportuno chiarire che il sistema Indo-Arabo era in realtà nato nei paesi della regione del fiume Indo [4]. Và in particolare ricordato il matematico Aryabhata. Costui introdusse nel 499 la funzione senoverso (Lat. "sinus versus" il senoverso di α altro non è che 1-cosα). [5]

Aryabhata compilò le prime tavole trigonometriche, illustrò i metodi di calcolo di aree e volumi ed introdusse la notazione posizionale decimale. Diede inoltre importanti contributi allo sviluppo dell'astronomia.

Leonardo studiò i classici di matematica noti all'epoca, tra i quali i Greci Diofanto ed Euclide [6]. Tornò a Pisa attorno al 1200. Qui si occupò esclusivamente di problemi matematici e geometrici, che lo tennero impegnato per i successivi 25 anni. Morì probabilmente ad un'età compresa tra i 70 e gli 80 anni.

[2]Notiamo che si era in un'epoca in cui la civiltà Araba e quella Ebraica erano diffusissime nell'Europa meridionale, sopratutto in Spagna e Sicilia

[3]Un primo tentativo (che non riscosse grande successo) di introdurre in Europa il sistema Indo-Arabo era stato effettuato in Spagna da Gerbert d'Aurillac (poi divenuto Papa Silvestro II) nel 976-980

[4]La "Civiltà della valle dell'Indo" è stata una delle culle della civiltà, della scrittura e della rivoluzione urbana.

[5]Il senoverso caratterizza la linearità di un segmento.

[6]Entrambi greci, ed entrambi vissuti in Egitto, a secoli di distanza.

Il suo primo libro sull'argomento [7] fu il suo "*Liber Abaci*" [8] pubblicato nel 1202, quando aveva circa trentadue anni. In questo testo, oltre a diffondere il sistema di numerazione Indo-Araba e l'algebra diffusa in quei paesi, presentò la serie[9] numerica che oggi porta il suo nome, appunto la "serie di Fibonacci" su cui torneremo.

Val la pena di riportare ciò che Fibonacci scrive della propria vita e del proprio libro [5, 6].

> "Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bugia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano, mi fece andare da lui, durante la mia fanciullezza, valutando l'utilità e il vantaggio futuro, e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco. Qui, introdotto nell'arte da uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure degli Indiani, mi piacque sopra ogni altra cosa la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute qualunque cosa si studiasse di essa, in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi e luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari. Ma io considerai addirittura tutto questo sapere e anche l'algoritmo e gli archi di Pitagora quasi un errore rispetto al metodo degli Indiani. Quindi abbracciando in modo più stretto il metodo stesso degli Indiani e studiandolo più attentamente, aggiungendo in esso alcuni concetti in senso più specifico e inserendo anche alcune delle sottigliez-

[7]La prima versione del libro è purtroppo andata perduta. Si sa di una versione rivista e pubblicata nel 1228 da Fibonacci medesimo. Probabilmente perduta anch'essa; vedasi la referenza [3].

[8]Che in alcuni libri viene scritto con la doppia b: Abbaco. Notiamo che il titolo può indurre in errore: non si tratta di un manuale di istruzioni per l'uso dello strumento Abaco, ma di un libro che insegna a "far di conto".

[9]Si allude spesso alla serie di Fibonacci come una successione. In matematica una successione è una sequenza di termini numerici a_k. La serie è la sequenza delle somme parziali s_k di una successione numerica [4]. In questo scritto parlerò sempre di serie o sequenza di Fibonacci. Anche se molti non saranno del medesimo parere!

ze della geometria di Euclide, mi sono sforzato di comporre la totalità di questo libro, distinta in quindici capitoli, nel modo più comprensibile possibile, dimostrando quasi tutto ciò che ho inserito con prove certe, affinché possano essere istruiti in questa scienza, con un metodo perfetto al di sopra di tutti gli altri, coloro che lo desiderano, e la gente latina d'altra parte, come accaduto finora, non vi si trovi del tutto esclusa. Se per caso ho inserito qualcosa meno o più del giusto o del necessario, vi prego di essere indulgenti con me, poiché non vi è alcuno che sia privo di difetti e che sia cauto in tutto, sotto ogni aspetto."

La Repubblica di Pisa gli assegnò un vitalizio che gli permise di dedicarsi completamente ai suoi studi.

Val la pena menzionare una circostanza mai completamente chiarita: nella lettera in cui la Repubblica di Pisa gli attribuisce il vitalizio, Fibonacci viene menzionato con il nome di "Bigollo". Probabilmente questo era il nome che gli veniva comunemente attribuito (in cui egli stesso si riconosceva), ad indicare colui che viaggiava di continuo. Un bighellone, diremmo oggi!

> "Considerando l'onore e il profitto della nostra città e dei cittadini, che derivano loro dalla dottrina e dai diligenti servigi del discreto e sapiente maestro Leonardo Bigollo nelle stime e ragioni d'abaco necessarie alla città e ai suoi funzionari e in altre cose quando occorre, deliberiamo col presente atto che allo stesso Leonardo, per la sua dedizione e scienza e in ricoimpensa del lavoro che sostiene per studiare e determinare le stime e le ragioni sopraddette, vengano assegnate dal comune e dal tesoro pubblico venti lire a titolo di mercede o salario annuo, oltre ai consueti benefici, e che inoltre lo stesso [Leonardo] serva come al solito il comune pisano e i suoi funzionari nelle pratiche d'abaco." [7].

Non deve sorprendere l'importanza, in quegli anni, degli scambi commerciali e culturali tra l'Italia ed il Nordafrica. Si parla di un periodo che precedette di un paio di secoli la scoperta, da parte di Colombo, dell'America. Notiamo per inciso che il fiorentino Amerigo Vespucci (che già nel 1489 conobbe in Spagna il Genovese Cristoforo Colombo, di cui fu grande ammiratore) fu il primo a rendersi conto che le terre scoperte da Colombo appartenevano ad un nuovo continente. Si viveva in un periodo quindi, in cui il Mediterraneo era ancora il centro del mondo, in particolare l'Italia, con le sue repubbliche marinare di Amalfi, Pisa, Genova e Venezia.[10] Di un periodo anche in cui la civiltà e la cultura araba era penetrata ed aveva fortemente influenzato la Spagna ed il meridione dell'Italia (la Sicilia in particolare).

È dovuta a Fibonacci l'introduzione in Europa del sistema di numerazione decimale [11] (con l'utilizzo dello zero, fondamentale in seguito per lo sviluppo di sistemi numerici quali quelli oggi adoperati nei computer: sistema ottale, binario ...). Sistema adoperato, come egli stesso ammise, dagli Indiani prima ancora che dagli Arabi.

Va detto che il sistema Indo-Arabo introdotto da Fibonacci faticò molto ad essere accettato, al punto che nel 1280-90 la città di Firenze ne proibì l'uso, visto che nel mondo bancario molti raggiravano i clienti modificando lo 0 in 8 o 9. Nello "Statuto dell'arte del cambio", pubblicato a Firenze nel 1299 si vietava ai mercanti di tenere i loro registri "in Abbaco" e si prescriveva l'uso delle cifre Romane o addirittura la scrittura per esteso dei nomi dei numeri. Fu soltanto dopo il 1400 che, in particolare sotto la famiglia dei Medici, la numerazione con caratteri romani venne definitivamente abbandonata. Resistenze perdurarono però nell'Europa del Nord fino a dopo il secolo sedicesimo.

In realtà, le motivazioni per queste resistenze furono molteplici. Una di queste consistette certamente nella difficoltà pratica di sostituire l'abaco (strumento meccanico) con i numeri scritti su carta, data la scarsità della carta in Italia (a differenza della maggiore disponibilità a quei tempi nel mondo arabo). La seconda fu legata

[10] Il declino della repubblica pisana iniziò poi nel 1284 con la sconfitta subita da Pisa nella battaglia della Meloria, ad opera dei Genovesi. Si concluse poi, dopo varie vissitudini, attorno al 1400 con la cessione della città alla Repubblica Fiorentina

[11] Anche noto come sistema posizionale.

alla rapidità con cui i commercianti erano ormai abituati ad adoperare l'abaco.

Nel primo capitolo del suo "*Liber abaci*", a volte scritto con la doppia b, Leonardo scrive:

> "Le nove cifre degli indiani sono queste: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Con tali nove figure, e con lo 0, che gli arabi chiamano "zefiro" qualsiasi numero può essere scritto come sarà dimostrato più avanti."

Oltre al famoso "*Liber Abaci*", Fibonacci pubblicò il "*Liber Quadratorum*", la "*Practica Geometriae*" e "*Flos*". Egli si occupò quindi anche di problemi di geometria [8]).

Fibonacci è oggi considerato uno dei più grandi matematici mai esistiti (si veda ad esempio [9]). Notizie dettagliate sulla sua opera possono essere ottenute consultando l'ottimo volume di Pier Daniele Napolitani [10].

Negli Stati Uniti è pubblicata da diversi anni una rivista a lui intitolata [11].

Ha contribuito, insieme ad altri, alla rinascita delle scienze esatte dopo la decadenza che si era avuta nell'Alto Medioevo. Contribuì all'unione fra i procedimenti della Geometria Greca Euclidea e gli strumenti matematici di calcolo elaborati dalla Scienza Islamica.

È utile aggiungere un paio di commenti riguardanti il sistema di mumerazione Indo-Arabo introdotto da Fibonacci in Europa. Il primo è il seguente: Fibonacci, come gli arabi, scriveva i numeri partendo dalla destra, spostandosi poi verso sinistra. Facciamo un esempio: Il numero 71.5779463519 veniva scritto come segue:

$$\frac{9153649775}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}\cdot 17$$

Per completezza, va detto che nella maggior parte dei casi i numeri e le frazioni venivano espressi a parole e non scritti. Ad esempio, la frazione $\frac{29}{30}$ pari a $\frac{1}{2\times 3\times 5}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{4}{5}$ sarebbe stata scritta come: "quattro quinti e due terzi di un quinto e la metà di un terzo di un quinto".

Il numero π (3.14159) sarebbe scritto come:

$$\frac{9}{10}\frac{5}{10}\frac{1}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10}3$$

Il secondo è l'uso del punto decimale, che a quei tempi non era conosciuto (né fu adoperato da Fibonacci). Questo fu introdotto da un'altro Italiano, il mercante e matematico Veneziano Giovanni Bianchini, attorno alla metà del 1400. Bianchini, dopo la sua esperienza di mercante, divenne amministratore della famiglia d'Este presso il Ducato di Ferrara [12].

Val la pena menzionare che molti dati storici sulla diffusione dall'algebra e della geometria fino al cinquecento sono reperibili nella referenza [13].

Leonardo Fibonacci e FedericoII

Alessandro Fibonacci è vissuto all'ncirca tra il 1170 ed il 1242, quindi gli anni della sua vita coincisero approssimativamente con quelli in cui visse Federico II (1194-1250)[12].

Tra gli scienziati vicini a Federico II va ricordato Michele Scoto (o Scotto)[13]. Scoto fu un grande Maestro, traduttore arabo-latino, filosofo, enciclopedista, astrologo, scienziato. Era nato intorno al 1190; forse discendente della famiglia degli Scott di Balwearie. Fu attivo a Toledo, Parigi, Roma, Bologna, Salerno, Melfi, Palermo.

Ciò permette di cogliere il significato del progetto scientifico federiciano. Federico, dal principio della "corte itinerante" sviluppò l'idea di una rete di relazioni culturali mediterranee, nonché tra l'Europa ed il Vicino Oriente.

[12] Federico II, che passò alla storia come *stupor mundi* nacque a Jesi, nelle Marche nel 1194. Fu l'unico figlio di Enrico VI Hohenstaufen (1165-1197), Re di Germania e poi Imperatore (dal 1191 al 1197), e di Costanza d'Altavilla (1154-1198) a sua volta figlia di RuggeroII il Normanno. Suo nonno era il leggendario Federico Barbarossa. Si racconta che il parto di Costanza (mentre era in viaggio dalla Germania verso la Sicilia) avvenisse in pubblico, nella piazza di Jesi. Ciò per dissipare ogni dubbio sulla reale maternità, visto che Costanza aveva già quarant'anni. Federico fu un grande estimatore delle arti e delle scienze. Nel periodo 1230-1250 fondò la famosa "scuola siciliana". Questa fu un centro culturale di grande importanza nel Mediterraneo. Federico ebbe relazioni e scambi culturali con il sultano al-Kamil ed il mondo arabo. I rapporti tra Federico ed il papato furono molto conflittuali. Subì la scomunica papale ben tre volte, da pontefici diversi: Onorio III (che peraltro morì prima che la scomunica fosse implementata) poi da Gregorio IX e da Innocenzo IV.

[13] Michele Scoto fu menzionato nel capitolo XX dell'Inferno di Dante, che scrive: "Quell'altro che ne' fianchi è così poco, Michele Scotto fu, che veramente delle magiche frode seppe il giuoco"

Figura 4: Busto di Federico II di Svevia.

Quando Fibonacci ritornò in Italia, la sua notorietà giunse alla corte dell'Imperatore. Federico fu molto interessato al suo "*Liber abaci*".

Il matematico e l'Imperatore si incontrarono una prima volta a Pisa, presumibilmente nell'estate del 1226. In quella occasione, un membro dell'*entourage* di Federico, Giovanni da Palermo, propose a Fibonacci una serie di problemi, tre dei quali poi Fibonacci riassunse nei suoi libri. Fibonacci, nella sua dedica a Federico del "*Liber quadratorum*" scriveva [10]:

> "Quando maestro Domenico, a Pisa, mi condusse a presentarmi ai piedi di Vostra Altezza, Principe Gloriosissimo Signore Federico, mi si presentò maestro Giovanni da Palermo proponendomi il seguente problema . . . trovare un numero quadrato tale che, sommandogli o sottraendogli 5, si ottenga sempre un numero quadrato . . . Recentemente poi, dai racconti che giravano per Pisa e da quelli che ritornavano dalla Curia Imperiale ho inteso che la Vostra Altezza e Maestà si degna di leggere il libro che ho composto sul numero [il Liber Abaci], e che talvolta piace a Voi ascoltare sottigliezze riguardanti la geometria e l'aritmetica."

È accertata una continua corrispondenza scientifica tra Federico II e Fibonacci. L'imperatore lesse e comprese gli scritti di Fibonacci e gli sottopose nuovi quesiti, ricevendo dettagliate risposte riguardanti la teoria delle frazioni. Nel "*Liber Quadratorum*" [14] dedicato a Federico, vennero affrontate questioni riguardanti le equazioni indeterminate di secondo grado. Corrispondenza vi fu anche tra Fibonacci e Michele Scoto. Fibonacci scrive:

> "Mio signore e maestro, sommo filosofo, Michael Scottus mi avete scritto di copiare per voi il libro sul numero che ho scritto tempo fa, per cui, assecondando la vostra richiesta, esaminandolo con accuratezza, l'ho corretto in vostro onore e per renderlo utile a molti altri. Durante la correzione ho aggiunto qualcosa di necessario e tagliato qualcosa di superfluo. In esso ho reso nota l'intera dottrina dei numeri secondo il metodo Indiano, metodo che ho scelto come il più efficiente in questa scienza."

Il *Liber Abaci*

La prima parte del libro [15] (capitoli da 1 a 7) è dedicata all'insegnamento di quella che oggi chiameremmo aritmetica elementare. Fibonacci ha in mente le applicazioni dei vari metodi di calcolo nel campo del commercio. Ad esempio introduce una tabella esplicativa relativa all'addizione e moltiplicazione dei numeri.

Nel primo capitolo scrive:

> "Un numero è una somma di unità, o una collezione di unità, ed attraverso la loro somma i numeri aumentano passo dopo passo, senza fine. Dapprima si compone a partire dall'unità quei numeri che vanno da uno a dieci. Poi

[14] Questo libro è considerato il vero capolavoro di Fibonacci. Esso pone Fibonacci come colui che più contribuì alla teoria dei numeri nei secoli intercorsi tra Diofanto (vissuto ad Alessandria verso il 250 d.C.) ed il matematico Pierre de Fermat (17-mo secolo)

[15] Il primo capitolo contiene la dedica a Michele Scoto.

a partire dalle decine quei numeri che vanno da dieci a cento . . ..

Discute poi alcuni casi semplici di somma di numeri. Da notare che, anche se le operazioni di somma sono poi descritte nel terzo capitolo, Leonardo le anticipa brevemente qui, poichè dovrà farne uso nel secondo capitolo, dove spiegherà i dettagli dell'operazione di moltiplicazione.

Il secondo capitolo è poi dedicato al metodo di effettuare moltiplicazioni. Distinguendo i casi in cui si voglia moltiplicare "una figura con molte" (il nostro adopera il termine "figure" per le "cifre") o "più figure per più figure" (ad esempio 2345 per 6789).

Nel terzo capitolo passa all'addizione di numeri interi "non importa quanti". Qui parla di mettere i numeri da sommare in righe, una sotto l'altra, per poi sommare le cifre, a cominciare da quelle più a destra, in verso ascendente, scrivendo le cifre meno significative e "tenendo in mano" quelle più significative... Nel far ciò, spiega come effettuare il controllo del risultato, con quella che chiama "la prova del nove".

Passa poi nel quarto capitolo alla "sottrazione di numeri minori da numeri maggiori", senza trascurare, anche in questo caso, le procedure di controllo del risultato. Ad esempio scrive:

> ". . . se si vuol sottrarre 92 da 380, allora il 92 è scritto sotto il 280 e, poichè è impossibile sottrarre il 2 dallo 0, allo stesso zero viene aggiunto 10; da questo 10 viene sottratto il 2 che è il numero inferiore; rimane un 8, che si mette da parte, e dal 10 aggiunto si tiene da parte la cifra 1, che viene aggiunta al 9; rimane un 10 che verrà sottratto dall'8, se possibile; ma ciò è impossibile . . ."

Il capitolo quinto è poi dedicato alla divisione di numeri interi. A cominciare dalla regola sulla divisione di numeri interi per numeri di primo grado (ad esempio, divisione di 365 per 2), per passare poi alla divisione per numeri con due o più cifre (ad esempio: 12352 per 11). Sempre dando indicazioni su come procedere nella pratica, ad esempio sulla divisione "dei numeri in memoria e in mano . . ." sulla "divisione di numeri incomposti di secondo grado" (il nostro chiama numeri incomposti o anche irregolari i numeri primi "per i quali nessun numero più piccolo esiste che ne sia fattore, eccetto l'unità. Numeri che gli Arabi chiamano "hasam", ed i Greci "lineari"). Aggiunge sempre considerazioni su come effettuare il controllo del risultato (che chiama "prova del nove"). Fa l'esempio della divisione di 13976 per 23, spiegando poi come effettuare la verifica del risultato, mediante la "prova del 9".

Passa poi nel sesto capitolo alla moltiplicazione di "numeri interi con frazioni". Ad esempio "11 e un mezzo per 22 e un terzo". O casi ancora più complicati, come "moltiplicare 17 e cinque ottavi e mezzo ottavo e due noni e un quinto di un nono per 28 e quattro undicesimi e tre ottavi di un undicesimo e un quinto e due quinti di un quinto". Nella settima parte del sesto capitolo passa alla "moltiplicazione dei numeri e delle frazioni la cui linea di frazione termina con un cerchio" [16]

Nel capitolo 7 discute della somma, la sottrazione e la divisione degli interi con frazioni e la riduzione delle parti di numeri in parti singole. Ad esempio: *La sottrazione di 5/6 di 14 da 2/9 di 231*

Nel capitolo 8 il nostro tratta della ricerca del valore di mercanzie con quello che lui chiama "il Metodo Principale". Esempio: lo scambio tra Once Palermitane e Valuta Pisana. Da questo capitolo si capisce l'enorme varietà di valute diverse che erano in uso nei vari posti del Mediterraneo all'epoca: Sterline Pisane, Valuta Messinese, Valuta Fiorentina . . . Genovese . . .. Basti pensare che nel medioevo c'erano in Italia ben ventotto città che battevano moneta, di cui sette nella sola Toscana [3]!

Fibonacci, in questo capitolo, si dilunga in dettagli circa le unità di peso in uso ai suoi tempi nella Repubblica Pisana. Scrive ad esempio:

> "Orbene, un quintale (cantare) pisano è fatto di cento parti, ciascuna della quali è chiamata rotolo, e ciascun rotolo ha 12 once, ciascuna delle quali . . ." [17]

[16] Con il termine "cerchio" intendeva lo zero. Gli indiani avevano in un primo tempo denotato lo spazio vuoto nella notazione posizionale tracciando un cerchio al loro posto. Da questo cerchio sarebbe poi nato l'odierno simbolo dello zero. [3]

[17] Notiamo che il termine "cantare" derivava dal latino medievale "cantarium", a sua volta derivato dall'arabo quintãr.

Nel capitolo 9 tratta degli scambi di mercanzie e simili. Il capitolo è diviso in tre parti. La prima parte è dedicata allo scambio di oggetti comuni; la seconda alla vendita di valuta ottenuta da precedenti scambi; la terza alle regole da seguire nel nutrire i cavalli con grano e della cura quotidiana che occorre averne!

Nel capitolo 10 discute della costituzione di compagnie commerciali e della divisione dei profitti tra i diversi soci, distinguendo i casi di due, tre . . . soci.

> “. . . un certo numero di persone sono membri di una società, possedendo in quote diverse parti della società; ottenendo poi un profitto che intendono dividere tra loro stessi, a seconda delle loro quote di possesso.”

Nal capitolo 11 tratta la struttura delle monete (rame, argento...) con percentuali diverse. Nonchè del commercio che se ne può fare. Esempio acquisto di 30 uccelli con 30 denari..

Il capitolo 12 appare uno di quelli con il maggior contenuto matematico (anche uno dei più lunghi). Ad esempio, come sommare una serie di numeri che aumentano ad un determinato tasso (per uno, per due, per tre . . .).

Ulteriore esempio: due viaggiatori che si rincorrono ad una velocità crescente. Altro esempio: trovare due numeri di cui i 2/7 del primo è 3/8 dell'altro. Per poi passare al caso di tre numeri. Altro esempio: un leone che cade in un pozzo profondo 50 palmi e riesce a risalire 1/7 di palmo al giorno, per poi scivolare di 1/8 di palmo al giorno. Questo è anche il capitolo in cui discute il famoso problema della moltiplicazione dei conigli; problema da cui nasce la serie di Fibonacci.

In questo capitolo dà anche la definizione di "numero perfetto" come quello per il quale la somma dei fattori dà il numero stesso, come nel caso del numero 6, che ha come fattori i numeri 1, 2, 3. [18]

In questo capitolo pone il problema di quattro uomini con denari. Dove il primo, il secondo ed il terzo hanno 27 denari; il secondo, terzo e quarto hanno 31 denari; il terzo, quarto e primo hanno 34 denari; il quarto, primo e secondo hanno 37 denari: si chiede quanti denari ha ciascuno.

[18] Definizione che è quella usata ancora oggi.

Il capitolo 13 è dedicato al metodo "Elchataym" (derivazione dall'Arabo al-khata'ayn) si intende: metodo della doppia falsa posizione). In questo capitolo discute il notissimo problema delle due torri e gli uccelli, su cui torneremo nel seguito. Val la pena ricordare fin da subito che l'essenza del metodo consiste nel considerare due valori particolari (errati) del valore dell'incognita, effettuare i calcoli necessari per trovare gli errori commessi con l'uso di tali valori, e poi applicare un processo di interpolazione lineare. Il nostro descrive il metodo come “quello attraverso il quale quasi tutti i problemi di Matematica possono essere risolti”.

Il successivo capitolo 14 affronta il problema del calcolo di radici quadrate e cubiche, nonchè le operazioni di moltiplicazione, divisione e sottrazione su di esse. Parla poi del trattamento dei binomi ed "apotomi" e delle loro radici. Fibonacci, come gli antichi Greci (ad esempio Euclide) , chiamava “apotome” la differenza tra due grandezze incommensurabili (dove compare un numero irrazionale) come ad esempio $\sqrt{2} - 1$ mentre la somma dei medesimi due termini era detto un “binomio”. [19]

Il capitolo 15 (l'ultimo) discute delle regole della geometria e di problemi algebrico-geometrici. In questo capitolo offre una soluzione geometrica al problema delle due torri e gli uccelli, già affrontato nel capitolo 13.

Ciò che si può notare nell'intera opera, è la pressochè totale assenza di formule matematiche. Queste sono sostituite da dettagliate frasi e poche tabelle. Notiamo che ciò era comune nella matematica dell'epoca e continuò ad esserlo per almeno altri quattro secoli.

La notazione algebrica moderna

Fibonacci, come tutti i matematici dell'epoca, adoperava il linguaggio corrente (e le dita!) per descrivere le operazioni matematiche.

L'introduzione di notazioni algebriche sintetiche in grado di rendere gli sviluppi matematici più compatti e facili da seguire, dovette attendere fino al sedicesimo secolo. Ciò fu merito del matematico e politico Francois Viète (1540-1603) conosciuto anche con il suo nome latiniz-

[19] Per gli antichi Greci, i numeri irrazionali come ad esempio $\sqrt{2}$ erano detti "grandezze incommensurabili".

Introduzione all'addizione e alla moltiplicazione dei numeri

Del due	*Del sette*	60 *e* 60 *fa* 120	*Del cinque*
2 *e* 2 *fa* 4	7 *e* 7 *fa* 14	60 70 130	5 *volte* 5 *fa* 25
2 3 5	7 8 15	60 80 140	5 6 30
2 4 6	7 9 16	60 90 150	5 7 35
2 5 7	7 10 17	70 *e* 70 *fa* 140	5 8 40
2 6 8	*Dell'otto*	70 80 150	5 9 45
2 7 9	8 *e* 8 *fa* 16	70 90 160	5 10 50
2 8 10	8 9 17	80 *e* 80 *fa* 160	*Del sei*
2 9 11	8 10 18	80 90 170	6 *volte* 6 *fa* 36
2 10 12	*Del nove*	90 *e* 90 *fa* 180	6 7 42
Del tre	9 *e* 9 *fa* 18	*Fine delle addizioni*	6 8 48
3 *e* 3 *fa* 6	9 10 19	*Iniziano le*	6 9 64
3 4 7	*Del dieci*	*moltiplicazioni*	6 10 50
3 5 8	10 *e* 10 *fa* 20	*Del due*	*Del sette*
3 6 9	20 *e* 20 *fa* 40	2 *volte* 2 *fa* 4	7 *volte* 7 *fa* 49
3 7 10	20 30 50	2 3 6	7 8 56
3 8 11	20 40 60	2 4 8	7 9 63
3 9 12	20 50 70	2 5 10	7 10 70
3 10 13	20 60 80	2 6 12	*Dell'otto*
Del quattro	20 70 90	2 7 14	8 *volte* 8 *fa* 64
4 *e* 4 *fa* 8	20 80 100	2 8 16	8 9 72
4 5 9	20 90 110	2 9 18	8 10 80
4 6 10	30 *e* 30 *fa* 60	2 10 20	*Del nove*
4 7 11	30 40 70	*Del tre*	9 *volte* 9 *fa* 81
4 8 12	30 50 80	3 *volte* 3 *fa* 9	9 10 90
4 9 13	30 60 90	3 4 12	*Del dieci*
4 10 14	30 70 100	3 5 15	10 *volte* 10 *fa* 100
Del cinque	30 80 110	3 6 18	10 *volte* 20 *fa* 200
5 *e* 5 *fa* 10	30 90 120	3 7 21	*Fine delle*
5 6 11	40 *e* 40 *fa* 80	3 8 24	*moltiplicazioni*
5 7 12	40 50 90	3 9 27	
5 8 13	40 60 100	3 10 30	
5 9 14	40 70 110	*Del quattro*	
5 10 15	40 80 120	4 *volte* 4 *fa* 16	
Del sei	40 90 130	4 5 20	
6 *e* 6 *fa* 12	50 *e* 50 *fa* 100	4 6 24	
6 7 13	50 60 110	4 7 28	
6 8 14	50 70 120	4 8 32	
6 9 15	50 80 130	4 9 36	
6 10 16	50 90 140	4 10 40	

Scrivendo le addizioni e le moltiplicazioni in tabelle, sempre facendo uso delle mani per tenere i numeri, si disimpegna l'utilizzo delle mani per eseguire le addizioni e le moltiplicazioni di numeri.

Figura 5: Introduzione all'addizione e moltiplicazione dei numeri

zato *Franciscus Vieta*. Questi divise la sua attività tra una intensa vita politica e la sua passione per la matematica. Si occupò di aritmetica, algebra, trigonometria e geometria. All'epoca si adoperavano ancora lettere per rappresentare sia le grandezze note che le incognite. Viète introdusse un metodo molto semplice: usò le vocali per rappresentare le quantità incognite nel problema, e consonanti per le quantità note. Tuttavia Viète non adottò nei suoi scritti in modo coerente tale notazione; continuò ad esser legato alla tradizione Medievale [14].

La serie di Fibonacci

Per iniziare, un po' di storia. La sequenza di Fibonacci è una successione di numeri interi, probabilmente scoperta per la prima volta da Fibonacci. Si racconta che sviluppò la prima funzione ricorsiva della storia della matematica, durante un torneo tenutosi a Pisa alla presenza di Federico II.

Gli sfidanti, tutti matematici di fama, erano chiamati a risolvere un problema basato sulla riproduzione dei conigli:

> "Un certo uomo mette una coppia (maschio-femmina) di conigli in un posto circondato su tutti i lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte da quella coppia in un anno, se si suppone che ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia, che dal secondo mese in avanti diventa produttiva?"

La storia racconta che Fibonacci risolse l'enigma talmente in fretta che molti dei partecipanti lo accusarono di aver barato. La risposta, 377, derivava proprio dall'aver compreso di trovarsi di fronte a una sequenza ricorsiva: il numero totale di coppie generate alla fine di ogni mese, capì il matematico, si ottiene sommando il numero delle coppie presenti nei due mesi che lo precedono, e quindi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, e così via . . .

Una sequenza curiosa, che presenta diverse caratteristiche uniche, di cui probabilmente la più interessante venne scoperta solo diversi secoli dopo, in epoca rinascimentale: la successione di Fibonacci è caratterizzata dal fatto che il rapporto di ogni numero con il precedente, all'aumentare dei numeri, si avvicina sempre più al numero aureo, un rapporto che è alla base dell'omonima sezione ritenuta dalle origini dell'arte occidentale uno standard di armonia, e frequentemente presente anche in natura. Su ciò ritorneremo più avanti.

Il modo adoperato da Fibonacci per introdurre la "serie di Fibonacci" è quello suddetto delle coppie di conigli.

Ammettiamo quindi di porre in una grande gabbia una coppia di conigli (maschio e femmina). Ammettiamo anche che la coppia di conigli e tutte le coppie successivamente generate siano fertili dal secondo mese di vita in poi e che ogni coppia dia vita ad una ed una sola coppia per mese. Ammettiamo anche che le successive coppie generate siano costituite da un maschio ed una femmina e che nessuno dei conigli delle coppie muoia nel corso dell'anno. Ci chiediamo quante coppie di conigli saranno presenti alla fine dell'anno.

Con riferimento alla Figura 6 possiamo seguire l'evoluzione delle coppie di conigli nel tempo. Nel primo mese abbiamo una sola coppia di conigli (ancora non fertile) Nel secondo mese la coppia è ormai fertile e darà luogo nel terzo mese ad una coppia di conigli ancora non fertile. Quindi alla fine del terzo mese abbiamo una coppia di conigli fertile ed una non fertile (per un totale di due coppie). Nel quarto mese la nuova coppia sarà diventata fertile ed avremo quindi un totale di tre coppie di conigli di cui due fertili ed una non fertile. Nel quinto mese una nuova coppia sarà diventata fertile. Avremo quindi un totale di 5 coppie di cui tre fertili e due non fertili. Vedremo così che il numero di coppie presenti è 1 2 3 5 ...

Proseguendo sarebbe facile verificare che nei mesi successivi avremmo: 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 coppie. 377 sarebbe quindi il numero di coppie presenti nella gabbia dopo un anno.

Questa sequenza, in cui ogni numero è la somma dei due precedenti, è la "serie di Fibonacci", che ora riscriviamo per intero (relativamente al primo anno):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377

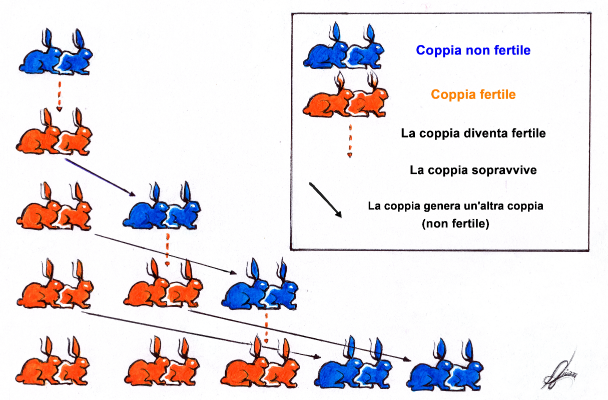
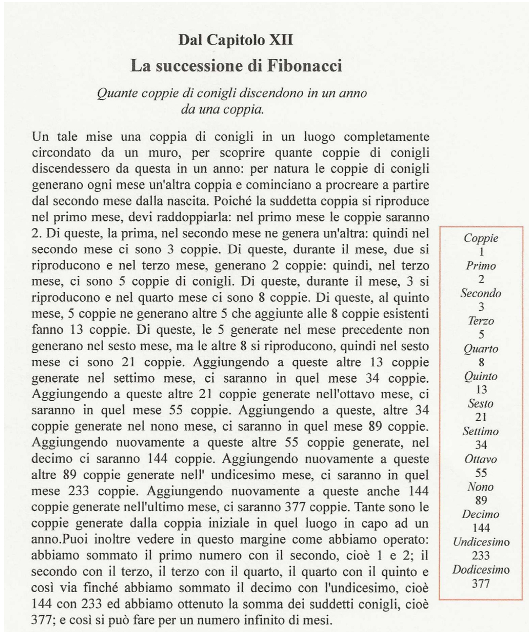


Figura 6: Uno schema che illustra in modo intuitivo la moltiplicazione dei conigli nei primi mesi (a cura di Anna Liuzzi).

Ogni numero della serie di Fibonacci può essere ottenuto tramite la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} F_n &= 1 \; se \; n = 1 \\ &= 1 \; se \; n = 2 \\ &= F_{n-1} + F_{n-2} \; se \; n \geq 3 \quad . \end{aligned} \tag{1}$$



Dal Capitolo XII

La successione di Fibonacci

Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2. Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie. Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli. Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie. Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie. Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie. Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie. Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie. Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell' undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie. Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno.Puoi inoltre vedere in questo margine come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè 1 e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

Coppie
1
Primo
2
Secondo
3
Terzo
5
Quarto
8
Quinto
13
Sesto
21
Settimo
34
Ottavo
55
Nono
89
Decimo
144
Undicesimo
233
Dodicesimo
377

Figura 7: Successione di Fibonacci. Come estratta dal capitolo XII del suo "*Liber abaci*" Nella traduzione presente nello scritto di Luciano Ancora. [5].

Notiamo inoltre che due numeri consecutivi della serie sono "coprimi". Inoltre se n è un divisore di m allora F_n divide F_m.

L' ennesimo elemento può poi essere calcolato facendo uso dei coefficienti binomiali:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} \quad . \tag{2}$$

Anticipando ciò che vedremo meglio in seguito, osserviamo una interessante caratteristica di questa serie. Ignorando il primo (cioè il termine 0): il rapporto tra il secondo termine ed il primo è 1. Quello tra il terzo ed il secondo è 2; quello tra il quarto ed il terzo è 1.5; quello tra il quinto ed il quarto è 2.5 ... quello tra gli ultimi due è 1.618. Si potrebbe verificare che il limite del rapporto tra il termine ennesimo ed il precedente, per n tendente all'infinito è quello che conosciamo come il "rapporto aureo"s: 1.6180339887 ... che è un numero irrazionale. Questo è indicato in matematica con il simbolo Φ. È anche noto come “costante di Fidia”, dal nome del grande scultore del V secolo a.c. .

Riferimenti all’opera di Fibonacci si trovano già in due opere pubblicate dal frate francescano e matematico Italiano Luca Pacioli (Borgo San Sepolcro, 1445-1517) ritratto nel quadro presentato in Fig. 8. La prima di queste, dal titolo "*Summa de Arithmetica , Geometria, Proportioni et Proportionalità*" pubblicata a Venezia nel 1494, fu di grande importanza per la diffusione della matematica in Europa. Quest’opera, scritta in volgare, conteneva un trattato generale di aritmetica ed algebra, di elementi di aritmetica ad uso dei mercanti (con dettagli sui concetti di "Dare", "Avere", "Bilancio"...) che poi trovò diffusione in in tutta Europa col nome di "Metodo Veneziano". In successive pubblicazioni “De Divina Proportione” del 1509 denotò con il simbolo suddetto il rapporto aureo [20].

Nella pubblicazione del 1494 il Pacioli faceva riferimento a Leonardo da Pisa, ascrivendogli il ruolo di ”padre della rivoluzione aritmetica in Europa" con il suo ”*Liber abbaci*".

Figura 8: Ritratto di Luca Pacioli (1495). Attribuito a Jacopo de’ Barbari.

Va precisato che Fibonacci venne a contatto con i grandi matematici arabi del tempo, dai quali apprese moltissimo. La matematica nota agli arabi si fondava a sua volta sull’opera del grande matematico persiano Abu jabar al-khwarizmi (Bagdad 750-850 d.c.). Era noto per aver scritto importanti opere di astronomia e matematica, che introdussero i numeri indo-arabi e l’idea di algebra agli studiosi europei. A lui è infatti dovuta l’introduzione dell’algebra (*al-gabr* in Arabo) come notato da Laura Catastini e Franco Ghione nel loro interessantissimo libro [15].

Il significato etimologico del termine *al-gabr* è "aggiustare", "restaurare", "riparare" e si riferisce all’operazione di aggiungere uno stesso termine ai due membri di un’uguaglianza, con lo scopo di avere nell’equazione solo termini positivi. Il senso di questo nome è legato al fatto che un termine negativo, in un’equazione, era pensato come un termine tolto, amputato, e si doveva aggiustare l’equazione aggiungendo a ciascuno dei due membri il suo opposto.

Diversi autori hanno avanzato il sospetto che il "*Liber Abaci*" di Fibonacci sia stato almeno in parte copiato dall’opera di Abu jabar al-khwarizmi [21] di cui sembra esistesse all’epoca una versione in Latino. Le basi di questo sospetto sono molto incerte. Per una discussione approfondita, si rimanda al libro di Keith Devlin [3].

Figura 9: Statua di Abu jabar al-khwarizmi a Khiva in Uzbekistan

La sequenza (o serie) di Fibonacci era in realtà nota fin da tempi antichi ai matematici egiziani ed indù. Il nome di "numeri di Fibonacci" fu dato solo nel XIX secolo dal matematico francese Edouard Lucas (1842-1891).

Va anche detto che la connessione tra la serie di Fibonacci e la sezione aurea fu verificata definitivamente solo nel XIX secolo. Ma fu l’astronomo tedesco Johannes von Kepler (Keplero), scopritore delle tre leggi fondamentali sul moto dei pianeti, il primo a suggerire, nel XVII secolo, la relazione già menzionata fra il numero aureo e la successione di Fibonacci.

[20] Le illustrazioni per il "*De Divina Proporzione*" furono opera di Leonardo da Vinci

[21] Abu Ja’far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (750-850 circa).

Altre proprietà della serie di Fibonacci

Molte altre proprietà della serie di Fibonacci sono state osservate e studiate da numerosi autori. Oltre a quella già notata, relativa al rapporto aureo, si può notare che in tutta la serie di Fibonacci compaiono solo tre quadrati perfetti: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{12} = 144$. Inoltre, il rapporto di un numero per il secondo che lo precede è sempre all'incirca uguale a 2.6 (tendente a 2.618) che è il quadrato di 1.618.

La sequenza che si ottiene elencando le differenze fra due numeri di Fibonacci consecutivi dà vita ancora alla sequenza originale

La somma dei quadrati di due numeri di Fibonacci consecutivi è un numero di Fibonacci.

Un collegamento esiste tra la serie di Fibonacci ed il triangolo di Tartaglia [22].

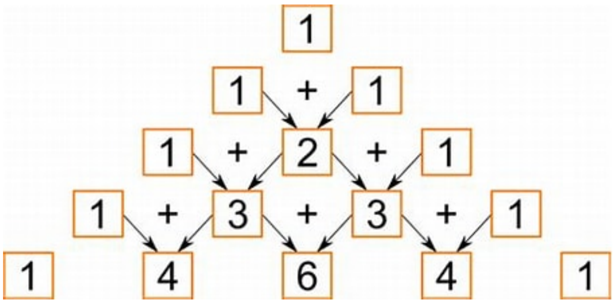


Figura 10: Triangolo di Tartaglia. In questo ciascun numero è la somma dei due che sono sopra di esso, come mostrato dalle frecce.

Nel triangolo di Tartaglia, gli elementi di ogni riga coincidono con i coefficienti dei successivi sviluppi delle potenze di un binomio quale $(a+b)^n$. Più in particolare, la riga n-ma (partendo dall'alto) contiene i coefficienti dello sviluppo della potenza $n-1$ del binomio $(a+b)$. Ad esempio: la riga 1 ci da i coefficienti di $(a+b)^0$ la riga 2 ci da i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^1$ la riga 3 quelli di $(a+b)^2$ ecc.

I numeri di Fibonacci possono essere ottenuti dal medesimo triangolo, sommando i termini delle cosiddette "diagonali storte". Ciò si ottiene spostandosi ogni volta di una riga sotto e due numeri a sinistra. Ad esempio:

$$1+6+5+1 = 13 = F_7 \quad ,$$

$$1+15+35+28+9+1 = 89 = F_{11} \quad .$$

Ciò si può chiaramente vedere nella Figura 11.

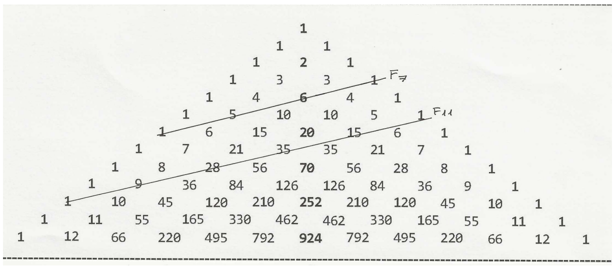


Figura 11: Triangolo di Tartaglia.

La spirale di Fibonacci

Alla serie di Fibonacci si può arrivare per via geometrica, nel modo illustrato in Figura 12. Partendo da un quadrato di lato 1, aggiungiamo sotto questo un secondo quadrato uguale. L'insieme dei due forma un rettangolo 2×1. Disegnamo ora accanto a questi un ulteriore quadrato di lato 2, come in figura. Insieme ai precedenti, questo forma un rettangolo che misura 3×2. Aggiungiamo ancora una quadrato di lato 3 sotto l'insieme già realizzato. Avremo ora un rettangolo che misura 3×5. Accanto a questo aggiungiamo un nuovo quadrato di lato 5. Continuando avremo la possibilità di aggiungere un quadrato di lato 8, e così via. Abbiamo realizzato una sequenza di quadrati, i cui lati hanno misure: 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... cioè giusto la serie di Fibonacci.

Ora in ciascuno dei quadrati tracciamo un arco di cerchio come in Figura 13.

Con l'aggiunta di pochi archi di cerchio si arriva a quella che è nota come "spirale di Fibonacci" come mostrato in Figura 13.

La spirale di Fibonacci si osserva in natura in motissimi casi. Un caso tipico è quello di certe conchiglie. Un'altro ancora quello delle felci, come si può vedere in Figura 14.

La stessa osservazione può esser fatta relativamente allo sviluppo di un ramo di palma, come si nota in Figura 15.

[22] Quello che conosciamo come triangolo di Tartaglia (descritto così da Tartaglia nel 1556) era già noto ai matematici cinesi forse già prima dell'anno 1000. Fu studiato in Europa da N.Fontana (noto come Tartaglia per via della balbuzie). Fu successivamente noto come triangolo di Pascal circa un secolo dopo in Francia e nel mondo Anglosassone.

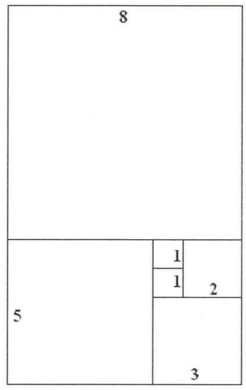


Figura 12: Rettangoli di Fibonacci

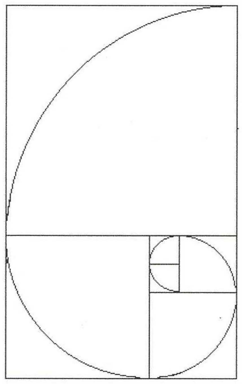


Figura 13: Spirale di Fibonacci

Il biologo e biochimico Enrico Bucci scriveva al riguardo sulla sua pagina facebook nell'aprile 2023:

> "Camminando nei boschi e nelle campagne, è il momento in cui si nota un fenomeno che non può che affascinare chiunque tenga gli occhi un po' aperti sulla vita da cui è circondato: le verdi spirali delle fronde di felce cominciano a srotolarsi, esponendo le prime foglioline che più avanti assumeranno la classica disposizione piumata. Questo modo di proteggere le giovani foglie durante l'inverno, per poi esporle rapidamente quando è il momento, si chiama vernazione circinata, perchè in latino circĭnus significa cerchio, e circinatus significa dunque disposto in un cerchio, come appunto osserviamo nella spirale della fronda di una felce, prima che essa si srotoli nella foglia." [?].

In astrofisica si nota spesso uno sviluppo a spirale per diverse Galassie, quasi identico a quello che si osserva nel caso delle piante, come si può vedere in Figura 16.

Figura 14: Lo sviluppo di una felce segue la forma della spirale di Fibonacci.

Figura 15: Lo sviluppo di una palma, come quello di una felce, segue la forma della spirale di Fibonacci.

I polinomi di Fibonacci

I polinomi di Fibonacci sono una generalizzazione dei numeri di Fibonacci. Sono definiti come segue:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 \;\text{ se }\; n = 1 \\ &= x \;\text{ se }\; n = 2 \\ &= xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \;\text{ se }\; n \geq 3 \end{aligned}$$

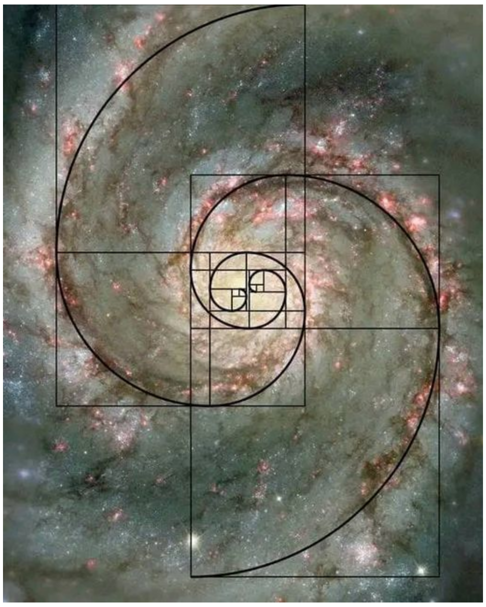


Figura 16: Anche lo sviluppo di una galassia ha la forma a spirale di Fibonacci.

I primi polinomi sono i seguenti:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2+1 \\ F_4(x) &= x^3+2x \\ F_5(x) &= x^4+3x^2+1 \\ F_6(x) &= x^5+4x^3+3x \quad . \end{aligned}$$

Notiamo che per $x = 1$ il valore di ciascun polinomio coincide con il corrispondente termine della serie di Fibonacci.

I polinomi di Fibonacci $F_n(x)$ e $F_m(x)$ sono divisibili tra loro solo se n ed m sono divisibili tra loro. Un modo equivalente di esprimere ciò è il seguente:

$$\mathrm{MCD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{MCD}(n,m)} \quad .$$

Dove MCD sta per il massimo comun divisore ed F il polinomio di Fibonacci.

I polinomi di Fibonacci risultano utili nella soluzione di alcune equazioni differenziali.

La sezione aurea ed i numeri di Fibonacci nelle arti e nella natura

Senza addentrarci nella discussione, trattata in moltissime opere, relativa all'utilizzo della "sezione aurea" nelle arti, val la pena di ricordare che, a partire dagli egizi, passando poi per Leonardo da Vinci ed altri, questa proporzione, considerata "divina" è stata sempre utilizzata come linea guida per la realizzazione di qualcosa di geometricamente e visivamente armonioso e gradevole. Vengono chiamati "rettangoli aurei" quelli in cui il rapporto tra larghezza ed altezza è data dal valore suddetto (1.618. . .).

I numeri di Fibonacci sono presenti in natura nel caso di molti fiori. Difficilmente troveremo in natura fiori con un numero di petali diverso da un numero appartenente alla serie di Fibonacci: gigli e iris (3), ranuncoli (5), delphinia (8), tageti (13), margherite (13, 21 o 34), girasoli (34, 55, 89 o 144)[23]. Sembra che la chiave di volta per spiegare questa particolare configurazione dei petali nei fiori, risieda in un ormone vegetale noto come "auxina". Si tratta dell'ormone della crescita e dello sviluppo di foglie, fiori e piante. L'auxina fluisce nella pianta in una direzione a spirale[16]. Informazioni sulla correlazione tra lo sviluppo delle foglie di alcune palme e la serie di Fibonacci sono reperibili negli articoli di T.A. Davis [17] e [18].

Tuttavia un nuovo studio pubblicato su Science, ha dimostrato che in un antico genere di piante vissute circa 400 milioni di anni fa, le spirali con cui apparivano le foglie giovani sui fusti dei germogli non avevano relazione con la sequenza di Fibonacci.

Nel campo musicale, secondo uno studio del critico musicale Marco Masoni (grande appassionato e studioso delle composizioni di Lucio Battisti) alcuni brani dell'album "L'apparenza" di Lucio Battisti sarebbero stati costruiti seguendo la sezione aurea [19].

Inoltre, non va dimenticato il fatto che già nei secoli passati alcuni grandi compositori si sono ispirati alla serie numerica di Fibonacci. Tra questi vanno ricordati Bach, Beethoven, Bartòk, Debussy, Schubert . . .

[23] Personalmente ho avuto difficoltà a verificare sul campo questa osservazione.

Il problema della fonte, le due torri e gli uccelli

Un problema che Fibonacci pone nel suo "*liber abaci*" è quello degli "uccelli e le due torri". Questo problema è nel tredicesimo capitolo del suo libro, capitolo dedicato alle regole della cosiddetta "doppia falsa posizione".

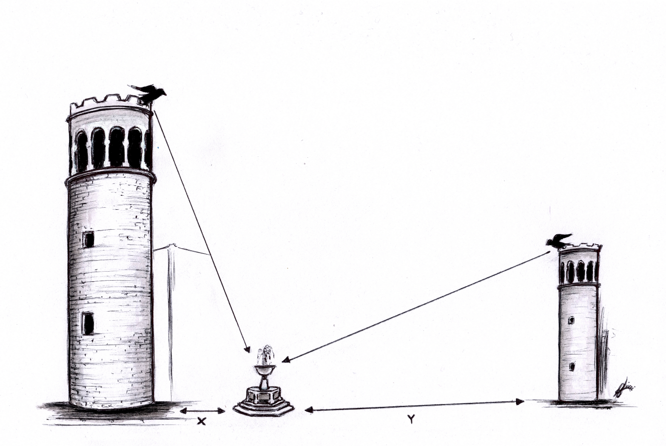


Figura 17: Le due torri e gli uccelli (a cura di Anna Liuzzi)

Due uccelli sono in cima a due torri, alte rispettivamente 30 passi e 40 passi. Le due torri distano tra loro 50 passi (misurati al suolo). I due uccelli partono simultaneamente verso una fontana posta al suolo tra le due torri, volando lungo traiettorie rettilinee, con ugual velocità ed arrivano simultaneamente alla fontana. Si chiede quale sia la distanza della fontana da ciascuna delle due torri.

Fibonacci fornisce due metodi diversi per ottenere il risultato, il primo (numerico) nel capitolo XIII, l'altro (geometrico) nel capitolo XV.

La soluzione che oggi adotteremmo, basata sul teorema di Pitagora è la seguente. Poiché i due uccelli partono simultaneamente ed arrivano simultaneamente, muovendosi lungo traiettorie rettilinee, essi si muovono lungo le ipotenuse di due triangoli, che ovviamente avranno la medesima lunghezza, visto che la percorrono nel medesimo tempo. Sia x la distanza della fontana dalla torre più alta ed y quella dalla torre più bassa (con $x + y = 50$). Avremo quindi l'equazione:

$$x^2 + 40^2 = y^2 + 30^2 \quad ,$$

accanto all'altra:

$$x + y = 50 \quad .$$

Da queste otteniamo facilmente: $x = 18$ e $y = 32$.

Fibonacci fa uso di quello che chiama il metodo della "falsa posizione". Ammettiamo che x sia 10 ed y (cioè 50 -x) sia 40. Le lunghezze delle due traiettorie (le due ipotenuse) sarebbero allora:

$$L_1^2 = y^2 + 30^2 = 40^2 + 30^2 = 2500 \quad ,$$

$$L_2^2 = x^2 + 40^2 = 10^2 + 40^2 = 1700 \quad .$$

Con una differenza Δ tra i due percorsi di:

$$\Delta = L_1^2 - L_2^2 = 800 \quad .$$

Perché i due percorsi siano uguali, è facile vedere che occorre aumentare x (distanza dalla torre più alta) e diminuire y (cioè 50-x) (distanza dalla torre più bassa). Se ad esempio aumentiamo x di 5 passi e diminuiamo y della medesima quantità, otterremo:

$$L_1^2 = y^2 + 30^2 = 35^2 + 30^2 = 2125 \quad ,$$

$$L_2^2 = x^2 + 40^2 = 15^2 + 40^2 = 1825 \quad .$$

Con una differenza Δ tra i quadrati dei due percorsi di 300. Vediamo quindi che ad un aumento di 5 passi nella variabile x (distanza dalla torre più alta) corrisponde una diminuzione di 500 passi in Δ.

Si può facilmente vedere che Δ dipende linearmente da x. Scrivendo tale dipendenza nella forma:

$$\Delta = ax + b \quad ,$$

e facendo uso del fatto che per x=10 si ha Δ=800 e che per $x = 154$ si ha Δ=300, otteniamo: $a = -100$ e $b = 1800$. Da cui otteniamo che Δ si annulla per $x = 18$, come già ottenuto in precedenza.

Per verificare la linearità della dipendenza di Δ da x, scriviamo:

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= L_1^2(x) - L_2^2(x) \\
&= (50 - x)^2 + 30^2 - x^2 - 40^2 \\
&= -100x + 1800 \quad ,
\end{aligned}$$

da cui:

$$\delta(\Delta) = -100\delta x \quad .$$

Il metodo della regola della "doppia falsa posizione" (elchataym in arabo) può essere facilmente compreso con il seguente esempio tratto dal libro di Sigler citato nella referenza [5].

Spieghiamolo in breve adoperando una notazione attuale. Ammettiamo di voler risolvere l'equazione:

$$ax + b = c \quad ,$$

per la variabile x.

Introduciamo due possibili (false) soluzioni x_1 ed x_2 per l'incognita x. Otterremo due valori diversi per il termine c:

$$ax_1 + b = c_1 \quad ,$$

$$ax_2 + b = c_2 \quad .$$

Sottraendole otteniamo:

$$a(x_2 - x_1) = c_2 - c_1 \quad ,$$

da cui:

$$a = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1} \quad ,$$

$$b = c_2 - x_2 \frac{(c_2 - c_1)}{(x_2 - x_1} \quad .$$

Poniamo questi valori di a e b nell'equazione originale: $ax + b = c$ e risolviamo nella variabile x, otteniamo:

$$x = x_2 + \frac{(c - c_2)(x_2 - x_1)}{c_2 - c_1} \quad ,$$

che possiamo riscrivere nella forma:

$$\frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(c_2 - c)}{(c_2 - c_1)} \quad .$$

Notiamo che in questo caso la regola della doppia-falsa posizione è applicabile poichè l'equazione è lineare. Sarebbe ancora applicabile se l'equazione avesse più di una incognita. Non sarebbe facilmente applicabile in presenza di termini quadratici.

Il problema della fonte, le due torri e gli uccelli: soluzione geometrica

Per risolvere questo problema adoperando la geometria (vedasi le Figure 18 e 19, il nostro scrive:

> "Su di un certo terreno vi sono due torri di cui una è alta 30 piedi l'altra 40. La distanza tra le due torri è di 50 piedi. Due uccelli, scendendo insieme dalla sommità delle due torri volano verso il centro di una fontana posta fra le torri. Si vuol calcolare la distanza della fontana da ciascuna delle due torri. Sia la più grande delle tue torri rappresentata dal segmento di linea AB, quella della torre inferiore dal segmento di linea GD. Lo spazio fra esse è rappresentato dal segmento di linea BD e le sommità di esse sono connesse dal segmento di linea AG che è diviso in due parti uguali dal punto E. Da questo punto viene tracciato il segmento di linea EF parallelo alle linee AB e GD, mentre dal punto E viene tracciato il segmento di linea EZ che fa due angoli retti con la linea AG, nel punto E; io sostengo che il punto Z é il centro della fontana, che può essere dimostrato come segue: due segmenti di retta ZA e ZG, che rappresentano le direzioni di volo degli uccelli vengano tracciati fino al punto Z. Farò vedere che i due segmenti di retta sono uguali. Infatti il segmento di retta ZA forma un angolo retto nel triangolo ZAE, il quadrato del quale è uguale alla somma dei due quadrati ZE ed EA. Analogamente il quadrato del segmento di linea ZG è uguale alla somma dei due quadrati dei segmenti di linea GE e ZE. Ma GE è uguale ad EA ed il quadrato del segmento di retta EZ è in comune, come si si vede dai suddetti due triangoli. Quindi GZ ed AZ sono uguali, come volevamo dimostrare."

Per verificare la consistenza della soluzione geometrica con quella algebrica, esaminiamo, con Fibonacci, la Figura 19, tratta dall'edizione latina. Si noti che i triangoli GXA ed EFZ sono simili. Ne segue:

$$\frac{FZ}{EF} = \frac{AX}{GX} \ ,$$

da cui:

$$FZ = \frac{AX \times EF}{GX} = (40-30) \times \frac{(40+30)}{2} \times \frac{1}{50} \ .$$

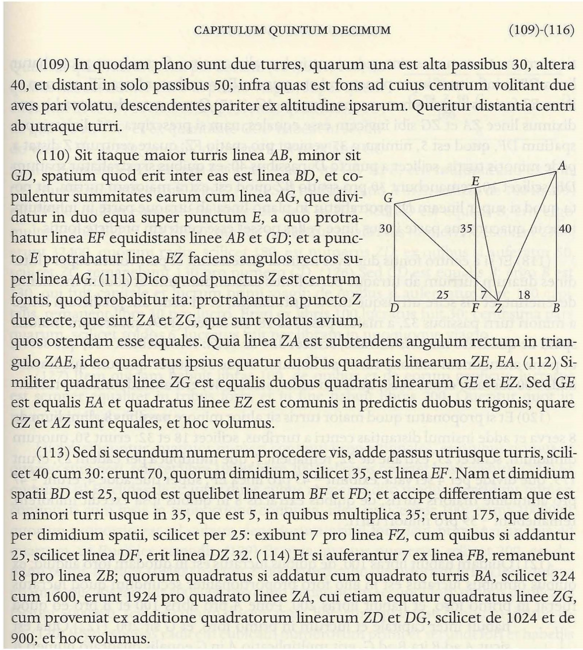
Da cui $FZ = 7$, e quindi $ZB = 25 - 7 = 18$ e $DZ = 32$.

Come accennato in precedenza, Fibonacci non ricorre a formule per ottenere il risultato. La Figura 19 è quella originale ma arbitrariamente modificata da me, con l'introduzione della linea GX, non presente nell'originale.

Il ragionamento di Fibonacci è invece il seguente.

> "Si sommino le altezze delle due torri cioe 30 e 40 che fa 70, dividiamolo per due ottenendo 35. Questa è la lunghezza della linea EF. Ora la metà della distanza BD è 25, che è la lunghezza comune dei segmenti di retta BF ed FD. Prendiamo poi la differenza tra 35 e l'altezza della torre minore, che fa 5, moltiplichiamo il risultato per 35 che fa 175, dividiamolo per la metà della distanza tra le torri, cioè 25. Il quoziente sarà 7 per il segmento di retta FZ. Se a questo aggiungo 25, cioè il segmento di retta DF , otterrò per il segmento di retta DZ il valore 32. Se poi 7 viene sottratto dal segmento di retta FB, rimarrà 18 per il segmento di retta ZB. Se il quadrato di questo viene aggiunto al quadrato dell'altezza della torre BA cioè 324 a 1600, otterremo 1924 per il quadrato del segmento di retta ZA. Questo è uguale al quadrato del segmento di retta ZG, somma dei quadrati dei segmenti di retta ZD e DG cioè 1024 e 900, come desiderato."

Per ulteriori dettagli su questo problema posto da Fibonacci, ed un approfondimento sulla soluzione geometrica si veda l'ottimo articolo pubblicato da Adriana Lanza su matmedia [20].



CAPITULUM QUINTUM DECIMUM (109)-(116)

(109) In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50; infra quas est fons ad cuius centrum volitant due aves pari volatu, descendentes pariter ex altitudine ipsarum. Queritur distantia centri ab utraque turri.

(110) Sit itaque maior turris linea *AB*, minor sit *GD*, spatium quod erit inter eas est linea *BD*, et copulentur summitates earum cum linea *AG*, que dividatur in duo equa super punctum *E*, a quo protrahatur linea *EF* equidistans linee *AB* et *GD*; et a puncto *E* protrahatur linea *EZ* faciens angulos rectos super linea *AG*. (111) Dico quod punctus *Z* est centrum fontis, quod probabitur ita: protrahantur a puncto *Z* due recte, que sint *ZA* et *ZG*, que sunt volatus avium, quos ostendam esse equales. Quia linea *ZA* est subtendens angulum rectum in triangulo *ZAE*, ideo quadratus ipsius equatur duobus quadratis linearum *ZE*, *EA*. (112) Similiter quadratus linee *ZG* est equalis duobus quadratis linearum *GE* et *EZ*. Sed *GE* est equalis *EA* et quadratus linee *EZ* est comunis in predictis duobus trigonis; quare *GZ* et *AZ* sunt equales, et hoc volumus.

(113) Sed si secundum numerum procedere vis, adde passus utriusque turris, scilicet 40 cum 30: erunt 70, quorum dimidium, scilicet 35, est linea *EF*. Nam et dimidium spatii *BD* est 25, quod est quelibet linearum *BF* et *FD*; et accipe differentiam que est a minori turri usque in 35, que est 5, in quibus multiplica 35; erunt 175, que divide per dimidium spatii, scilicet per 25: exibunt 7 pro linea *FZ*, cum quibus si addantur 25, scilicet linea *DF*, erit linea *DZ* 32. (114) Et si auferantur 7 ex linea *FB*, remanebunt 18 pro linea *ZB*; quorum quadratus si addatur cum quadrato turris *BA*, scilicet 324 cum 1600, erunt 1924 pro quadrato linee *ZA*, cui etiam equatur quadratus linee *ZG*, cum proveniat ex additione quadratorum linearum *ZD* et *DG*, scilicet de 1024 et de 900; et hoc volumus.

Figura 18: L'originale latino della pagina in cui Fibonacci descrive la soluzione geometrica del problema delle due torri e gli uccelli

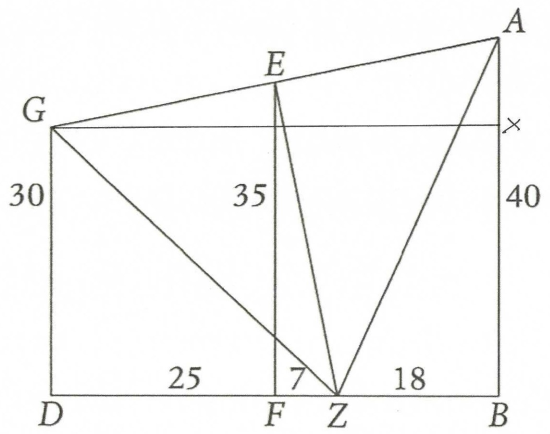


Figura 19: Geometria delle due torri, come nel Liber Abaci.

Il *Liber Quadratorum*

Anche se il nome di Fibonacci è strettamente legato al suo "*Liber Abaci*" conviene fare una breve menzione al "*Liber Quadratorum*" [21] cioè il "libro dei numeri quadrati" Questo fu dedicato a Federico II con l'obiettivo di risolvere due problemi che Giovanni da Palermo ed il filosofo Teodoro (della corte dell'imperatore) proposero a

Fibonacci nel corso della già citata visita a Pisa.

È un testo di grande importanza perché contiene risultati rilevanti sulla Teoria dei Numeri, nonché per l'originalità del metodo adoperato da Fibonacci, nel quale si manifesta una certa tendenza a risolvere i problemi cercando di inserirli in famiglie o classi di problemi.

Il libro contiene venti proposizioni riguardanti problemi di analisi indeterminata di secondo grado. Molte di queste costituiscono lemmi ausiliari utili per la soluzione di questioni affrontate da Fibonacci.

I numeri di Fibonacci nei mercati finanziari

Il nome di Fibonacci è molto noto anche agli analisti finanziari.

L'dea alla base di questo strumento è nell'osservazione che quando un titolo mostra una tendenza, o una variazione, tale variazione sembra coincidere all'incirca con uno dei rapporti tra numeri della serie di Fibonacci (o rapporti tra il numero n-mo e quello che viene due o tre passi dopo). Dopo aver raggiunto il nuovo livello, il titolo riprende l'andamento "normale".

I livelli di Fibonacci possono aiutare a prevedere la variazione del valore di un titolo e quindi a decidere se iniziare o meno una negoziazione. Per ulteriori dettagli sull'argomento, si veda la referenza [22].

L'interesse dei mercati finanziari per Fibonacci, non deve sorprendere. Nello stesso "*Liber Abaci*" sono frequenti gli esempi in cui Fibonacci parla di prestiti e di investimenti. Ad esempio, nel capitolo 15 (subito dopo la sua presentazione della sua soluzione geometrica del problema delle due due torri, la fontana e gli uccelli) passa a discutere il caso in cui

> "Due uomini hanno 100 libre (quì adoperata come unità di valuta, non di peso) per le quali la rendita in un certo mercato ha un determinato valore ed in un secondo mercato la rendita è proporzionale a quella presente nel primo mercato $\cdots$"

Conclusioni

Come detto all'inizio, Fibonacci e le sue opere hanno avuto un'impatto importantissimo sullo sviluppo della matematica in occidente. Ad esempio Pier Daniele Napolitani [10] scrive:

> "Con Fibonacci fanno il loro ingresso ufficiale in Europa i numeri arabi, la notazione posizionale e l'algebra. Ma nelle sue opere c'è molto di più: calcoli con le frazioni, rappresentazione geometrica delle quantità, soluzione di equazioni di primo e di secondo grado, in un'epoca in cui le equazioni venivano scritte con descrizioni a parole."

Notiamo anche che Fibonacci ha introdotto: 1) La barra che oggi si usa per le frazioni; prima di questo, il numeratore aveva virgolette attorno ad esso,
2) la notazione radice quadrata.

Si può discutere circa l'originalità delle opere di Fibonacci. Sicuramente molte delle sue elaborazioni erano già note da molti anni. Il suo merito è stato quello di averle, nel "*Liber abaci*", rese note in forma comprensibile ai suoi lettori dell'epoca. Altrettanto grande è il merito di avere sviluppato ed ampliato molte delle idee già note. È ciò che normalmente avviene nel campo scientifico: si costruisce, mattone dopo mattone, su fondamenta già posate dai predecessori.

Ad esempio, gli "Elementi" di Euclide non contenevano risultati nuovi di grande rilievo: vi sono infatti raccolte ed esposte in modo ammirevole le conoscenze matematiche (in particolare geometriche) note ai suoi tempi. Conoscenze in gran parte dovute ad autori precedenti (Eudosso, Teeteto..).

Quello che noi conosciamo come il "teorema di Pitagora" era già presente su alcune tavolette del periodo 1800-1600 a.c.. Pitagora è morto nel 490 a.c.!

Ad ogni modo, lo scopo che Fibonacci si proponeva con il suo "*Liber Abaci*" era quello di introdurre il sistema di numerazione e calcolo "Arabi" in Italia e non solo in Italia. A questo riguardo, Sigler [21] scrive:

> "Persino nei paesi musulmani del medio-oriente, il sistema di numerazione e di calcolo Arabi venivano usati so-

lo dai matematici e scienziati nei loro lavori scientifici, non da commercianti e uomini d'affari. Fibonacci non introdusse il sistema di calcolo per gli affari in Italia, ma gli si può attribuire il merito di averlo introdotto, più in generale, in tutta la pratica commerciale nel mondo. Lo storico S. Goitein mise in evidenza che furono eventualmente gli Europei ad insegnare agli uomini d'affari Arabi, la superiorità del sistema di numerazione e di calcolo arabi per le loro pratiche commerciali".

Apprendo che poche settimane fa è scomparso un ben noto matematico Italiano (Enrico Giusti), Professore a Pisa ed a Firenze. Giusti aveva speso gli ultimi anni della sua vita a ricerche nel campo della storia della matematica. In questo ambito aveva pubblicato (assieme a Paolo d'Alessandro) il volume che cito in referenza [6]. Il libro di Enrico Giusti, da poco in mio possesso, appare quello più completo e fedele all'originale. Gradevole da seguire per coloro che ancora conservano amore per il Latino, oltre che per la Matematica!

Il libro di Keith Devlin [3] contiene un gran numero di interessantissime informazioni storico-scientifiche sulla vita e l'opera di Fibonacci.

L'edizione Inglese di L.E. Sigler, citata in referenza [5], è di grande utilità per chi avesse scarsa familiarità con il Latino. Il il testo del "*Liber Abaci*" di Sigler è basato dull'edizione latina di Baldassarre Boncompagni del 1857 [**?**].

Altre opere di Fibonacci meno conosciute, che val la pena ricordare (anche se di non facile reperibilità, ad eccezione del "*Liber quadratorum*": [21]) sono:

- *Practica geometriae* (del 1223),
- *Liber quadratorum* (scritto dopo il 1225. Già menzionato. Dedicato a Federico II),
- *Epistola ad Magistrum Theodorum* (tra il 1228 ed il 1234),
- *Flos* (Fiore) (dedicato a Ranieri da Viterbo, influente nella corte pontificia durante il papato di Gregorio IX. Papa dal 1227 al 1241).

Ancora un riferimento degno di nota: "Il Fibonacci" [23]. Una raccolta di nove "fogli" creati tra il 1990 e il 2004 da Franco Conti, con altri collaboratori. Ciascun foglio, concepito come un "breve viaggio tra curiosità matematiche", contiene curiosità, idee, problemi e aneddoti di carattere matematico.

Figura 20: Il Fibonacci

Ringraziamenti

Debbo innanzitutto scusarmi con i lettori per le numerose lacune, imprecisioni ed errori sicuramente presenti in questo scritto.

Facendo mie le parole di Fibonacci: "vi prego di essere indulgenti con me, poiché non vi è alcuno che sia privo di difetti e che sia cauto in tutto, sotto ogni aspetto".

Ringrazio innanzitutto il Prof. Giampaolo Co', del Dipartimento di Fisica e Matematica di Unisalento, per l'attenzione prestata e le correzioni apportate alle successive stesure di questo scritto.

Ringrazio il Dott. Raffaele Flaminio del CNRS, LAPP/Annecy, nonchè la Prof.ssa Mariolina Batini per un'attenta revisione del testo.

Ringrazio la Dott.ssa Maria Teresa Filieri, Direttrice di Musei e profonda conoscitrice delle

civiltà e sviluppi Artistico/Scientifici del NordAfrica e Medio-Oriente per le informazioni che mi ha gentilmente fornito.

Ricordando con affetto due grandi Matematici che ho avuto la fortuna di incontrare nei primi anni dei miei studi Universitari: Renato Caccioppoli, Professore di Analisi Matematica al mio primo anno all'Università di Napoli; Ennio De Giorgi, mio Professore di Analisi Superiore, due anni dopo, all'Università di Pisa.

Ricordando anche i numerosi colleghi, purtroppo scomparsi, con cui ho avuto modo di interagire, nel corso delle mie non infrequenti visite a Lecce. Tra questi in primo luogo i colleghi Raimondo Anni, Giovanni Mancarella, Gino Rizzo e Giulio Soliani.

Un ricordo particolare per mia moglie, Giannina Biagini, prematuramente scomparsa. Dopo la laurea in matematica sotto la supervisione dell'allora giovane Giorgio Letta, aveva dedicato la sua attività all'insegnamento della matematica in varie Scuole Superiori, conservando sempre un immutato amore per questa scienza.

Appendice

Dal mago di Oz alla matematica di Oz: saltellando sulla serie di Fibonacci

Il Mago di Oz è un libro pubblicato da L. Frank Baum nel 1900. Il libro parla della piccola Dorothy e del suo cagnolino Toto, in un mondo di Fantasia. Il libro ebbe un enorme successo: ne fu tratto un famoso film del 1939, in cui apparvero grandi attori ed attrici, tre le quali si ricorda Judy Garland.

La fantastica storia della bimba Dorothy, del suo cagnolino Toto, dello Spaventapasseri, del Boscaiolo di latta e del mago fasullo, è stata inserita da Clifford A. Pickover nel suo libro (la matematica di Oz) che definisce Ginnastica mentale off-limits [24].

Il libro di Pickover contiene un gran numero di quesiti e problemi matematici. Tra questi, un paio, sono basati sulla serie di Fibonacci. Mi limiterò a presentarne solo uno: "il mistero dei sincronizzatori".

Dorothy si trova su un'enorme nave spaziale a forma di tazza da tè insieme al dottor Oz. Stanno andando a tutta velocità verso un'altra nave spaziale, contro la quale la nave di Dorothy spara dei proiettili. Ogni volta che una nave spara, le possibilità sono due, o manca la nave avversaria o la distrugge completamente. Inoltre, tutte le volte che la nave spara, ha una probabilità p del 50% di colpire la nave avversaria. Chiamiamo "nave A" la nave di Doroty e "nave B" quella dell'avversario.

Prima spara la nave A, poi la nave B, dopo la nave A, alternandosi, fino a quando una delle due viene distrutta. Quale è la probabilità P che la nave A sopravviva? Di quanto cambierebbe la probabilità P se ogni volta che una nave spara, la probabilità di colpire la nave avversaria fosse solo $p = 10\%$?

Per complicare ulteriormente il problema, il dottor Oz propone la seguente modifica, che definisce il "terribile trucco di Fibonacci TTF". In questo quesito TTF, le navi si sparano l'un l'altra secondo la sequenza di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... In altre parole, prima la nave A spara un colpo, poi spara un colpo la nave B, quindi la nave A spara 2 colpi, quindi la nave B, e via di seguito. Quale è la probabilità P che la nave A sopravviva, assumendo la suddetta probabilità $p = 50\%$? E quale sarebbe la medesima probabilità di sopravvivenza della nave A se la probabilità p di cui sopra non fosse il 50% ma il 10%?"

Mi limiterò, per brevità a fornire i risultati delle soluzioni che Pickover fornisce. Solo per il primo caso (escludendo quindi l'ipotesi TTF) riporterò i dettagli. In questo caso, la soluzione, per $p = 0.5$ è: $P = 2/3 = 0.67$. Se p fosse il 10% (1/10) troveremmo $P = 0.53$.

Il calcolo che l'autore fornisce è il seguente: La *chance* che la nave A colpisca al primo tiro è il 50% (0.5). Poi diamo una *chance* alla nave B. Il 50% delle volte B annienta A. Quale è la probabilità che B sbagli e che quindi A spari e colpisca B al suo secondo sparo del conflitto? Dobbiamo trovare la probabilità composta che A prima sbagli (0.5) seguita da uno sbaglio di B, seguita da un colpo messo a segno da A. Questa è $0.5 \times 0.5 \times 0.5$. A lungo andare possiamo gradualmente sviluppare una serie di probabilità di vittoria di A:

- 0.5 A vince
- 0.5×0.5 A vince

- $0.5 \times 0.5 \times 0.5$ A vince
- ....

Questa serie può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} 0.5 &\times (1 + 1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + ...) \\ &= 0.5 \times (4/3) = 2/3 \ . \end{aligned}$$

poichè la serie geometrica in parentesi converge al valore 4/3.

Nell'ipotesi in cui le navi sparino ad un rate come quello del caso TTF, la soluzione, per p=50% (0.5) sarà P=69.5%. Per p=10% (0.1) troveremmo P=54%.

[1] *Fibonacci, il Leonardo Pisano* - Un film di Francesco Andreotti. Documentario, Italia, (2003).

[2] L. Pisano (il Fibonacci) *Liber Abaci*, (1202 e 1228); *Practica Geometriae* (*La pratica della geometria*) (1220); *Liber Quadratorum* (*Il libro dei numeri quadrati*) (1225); *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometricam pertinentium*; Lettera a Todoro (Filosofo della corte di Federico II) riguardante la soluzione di due problemi: uno di algebra ed uno di geometria.

[3] K. Devlin: *I numeri magici di Fibonacci*, BUR-Rizzoli, Milano (2021).

[4] F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni: *Analisi Matematica ed applicazioni*, McGraw-Hill, Milano (2001).

[5] L. Ancora: *Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci tradotto in Italiano*. Parte prima: ARITMETICA (disponibile in rete). Un'edizione completa in Inglese è disponibile: L. E. Sigler: *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano Book of Calculation*, Springer, Berlino (2003).

[6] E. Giusti, P. D'alessandro: *Leonardi Bigolli Pisani. vulgo Fibonacci: Liber Abbaci*, Leo S. Olschki, (2020). (in Latino)

[7] E. Giusti: https://www.cultura.trentino.it/Appuntamenti/Leonardo-Fibonacci-e-\la-rinascita-della-matematica-in-Occidente

[8] Euclid's Book on Divisions of Figures by Archibald, Euclid, Fibonacci, and Woepcke. https://www.gutenberg.org/ebooks/38640

[9] https://it.wikipedia.org/wiki/LeonardoFibonacci

[10] AA. VV.: *Fibonacci-La rinascita della matematica in occidente*, A cura di Pier Daniele Napolitani. Pelago, Milano (2022).

[11] The Fibonacci Quarterly: Official publication of the Fibonacci Association) https://www.fq.math.ca/

[12] (Historia Mathematica: "Decimal fraction numeration and the decimal point in 15th-century Italy") https://www.sciencedirect.com

[13] E. Malisani: *Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento: Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni*, Quaderni di Ricerca in Didattica, 6 (1996) . https://sites.unipa.it/grim/AlgebraMalisaniIt.pdf

[14] https://it.wikipedia.org/wiki/Francois_Viète

[15] L. Catastini, F. Ghione: *La matematica che trasformò il mondo: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*, Carocci, Roma (2023).

[16] La scoperta viene da uno studio scientifico coordinato da un ricercatore di Biologia dell'Università di Pisa (Riccardo di Mambro) in collaborazione con l'Università di Roma La Sapienza, pubblicato sulla Rivista "Current Biology"

[17] T. A. Davis: *Fibonacci Numbers for Palm Foliar Spirals*, Acta Botanica Neelandica, 19 (1970) 236.

[18] T. A. Davis: *Why Fibonacci Sequence for Palm Leaf Spirals?*, Fibonacci Quarterly, 9 (1971) 237.

[19] https://www.quinewspisa.it/pisa-fibonacci-battisti-e-sezione-aurea.htm

[20] https://www.matmedia.it/il-problema-degli-uccelli-e-delle-torri. Purtroppo questo articolo contiene alcuni piccoli errori nella parte numerica.

[21] L. Pisano Fibonacci: *The book of squares. An Annotated Translation into Modern English by L.E. Sigler*, Academic Press, Londra (1987).

[22] https://www.cmcmarkets.com/it-it/guide-sul-trading/come-applicare-fibonacci-al-trading

[23] http://olimpiadi.dm.unibo.it/eventi/il-fibonacci/

[24] C. A. Pickover: *La matematica di Oz. Ginnastica mentale off-limits*, Muzzio, Padova (2004).

Vincenzo Flaminio: già Professore ordinario di Fisica Sperimentale presso l'Università di Pisa, dove ha ricoperto numerose cariche. Ha lavorato a lungo in esperimenti di fisica adronica al CERN di Ginevra e negli Stati Uniti. È stato responsabile di numerosi progetti di ricerca, sia nazionali che Europei. A partire dagli anni '80 si è occupato prevalentemente di fisica dei neutrini, con esperimenti effettuati al CERN. Si è poi occupato di esperimenti sulla ricerca di neutrini astrofisici, quali ANTARES e KM3.