Dai pattern ai frattali, passando per il caos

Vedere un mondo in un granello di sabbia e un paradiso in un fiore selvatico, tenere l'infinito nel palmo della mano e l'eternità in un'ora

William Blake

Deborah Lacitignola

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e dell'Informazione, Università di Cassino e del Lazio Meridionale

In questo articolo, come nella vita, Matematica e Natura sono compagne di viaggio. A prima vista questo binomio può apparire forse alquanto stravagante e, su questo, sarebbe senz'altro d'accordo William Shakespeare che così faceva parlare il suo Hamlet: "Ci sono più cose in cielo e in terra, Orazio, di quante ne sogni la tua filosofia."

E come dargli torto? perché, quando si pensa alla Natura, si pensa a qualcosa di così straordinariamente complesso, così sorprendente nell'estrema varietà delle sue forme ed altrettanto esuberante nelle sue imprevedibili manifestazioni, da non poter essere ridotto a semplice prodotto del pensiero umano, catturato da una formula o codificato da un teorema. Ed è invece questo che rievoca la Matematica: un mondo astratto, accessibile a pochi, distante anni luce da quello naturale; un mondo fatto di numeri, formule, teoremi e dimostrazioni. Ma Matematica e Natura, sono davvero due realtà inconciliabili?

Nel 1623 Galileo Galilei aprì la strada ad un sogno delineando, nel *Il Saggiatore* i primi tratti di una unione destinata a durare a lungo.

> "la filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. ([1], VI, 232)"

Ispirati dalle sue parole e dalle sue scoperte, generazioni di scienziati hanno portato avanti il sogno di decifrare questo misterioso *libro della natura*. E, sebbene Charles Darwin abbia elaborato la sua grande teoria dell'evoluzione e dell'origine delle specie senza fare uso di una sola formula matematica, nel XX secolo la matematica, ispirata dalla biologia, diviene uno strumento incredibilmente versatile per decifrare il misterioso mondo della natura.

Se è vero infatti che la natura, con la sua enorme varietà di forme e di strutture, è da sempre stata la musa ispiratrice di una moltitudine di scrittori, poeti e pittori, è altrettanto vero che questa grande varietà di forme e di strutture ha egualmente sorpreso, intrigato ed appassionato un gran numero di matematici, volti a scoprire delle regolarità nella grande diversità delle strutture naturali, in modo da poterne decifrare i misteri.

Patterns everywhere

In questo ambito si colloca, a metà del XX secolo, la teoria della *pattern formation*, nata con lo scopo di spiegare i meccanismi alla base della formazione di strutture del mondo naturale, dalla livrea dei pesci alle dune di sabbia del deserto. Questi scenari, sebbene appartenenti a mondi completamente diversi, possono essere spiegati all'interno di un framework matematico comune, che ha come precursore Alan Turing.

Alan Turing, brillante genio matematico, è noto ai più come padre della *computer science* e come colui che riuscì nell'intento di decriptare i codici segreti nazisti, codificati con la macchina denominata *Enigma*. In tal modo compì quell'importante impresa che Wiston Churchill definì *"the secret weapon that won the war"*. Alan Turing fu anche il fautore di una teoria matematica affascinante e rivoluzionaria in grado di spiegare i meccanismi alla base del ripetersi di una moltitudine di strutture, i *pattern*, ossia forme che ricorrono quasi magicamente nel mondo intorno a noi: dall'organizzazione sferica delle cellule in un embrione alla disposizione a spirale dei petali su un fiore, dalle onde sulle dune di sabbia del deserto alle macchie del leopardo o alle strisce delle zebre.

L'idea di Turing, ispirata anche dall'affascinante opera di Sir D'Arcy Wentworth Thompson [2], era che ci dovesse essere qualche principio matematico in grado di spiegare la formazione delle innumerevoli strutture che ricorrono nel mondo naturale. Così nel 1952 pubblicò l'articolo *The chemical basis of morphogenesis* [3], destinato a diventare una pietra miliare nel campo della *pattern formation*. Turing dimostrò come la diversità dei *pattern* che osserviamo in natura possa essere spiegata mediante una tipologia di modelli matematici, detti di reazione diffusione, e attraverso un meccanismo oggi noto come instabilità di Turing.

Grazie alla teoria di Turing sulla *pattern formation*, la domanda "perché il leopardo ha le sue macchie?" non è stata più appannaggio esclusivo di biologi o scrittori. Nel 1907, lo scrittore Rudyard Kipling aveva dato a questa domanda una suggestiva risposta nel racconto *How the Leopard Got His Spots*, pubblicato nella raccolta *Just so stories* [4], in cui racconta come gli animali siano venuti in possesso dei tratti che li caratterizzano per mezzo di divertenti e fantasiose spiegazioni. Rudyard Kipling immaginò che le caratteristiche macchie a forma di rosetta del leopardo fossero da attribuire al trasloco del leopardo in una "grande e fitta foresta, i cui alberi erano tutti immersi in strane ombre a chiazze, a pallini, a spruzzi, a strisce, a righe e a diagonali" e ad un etiope che gliele dipinse per farlo mimetizzare meglio tra le chiazze d'ombra della vegetazione.

Circa 80 anni dopo, grazie al meccanismo di instabilità di Turing, anche il matematico fu in grado di dire la sua. Così, nel 1988, James D. Murray, uno dei pionieri delle applicazioni della matematica in campo biologico, pubblicò sulla rivista Scientific American l'articolo *How the Leopard Gets Its Spots* [5] il cui titolo richiamava quello del racconto di Kipling. Murray, utilizzando la classe di modelli di tipo reazione-diffusione e sfruttando il meccanismo di instabilità di Turing, mostrò come fosse possibile riprodurre, al variare di certi parametri di controllo, le diverse tipologie di macchie presenti sulla pelliccia dei grandi felini, leopardi inclusi.

Il meccanismo di instabilità di Turing è oggi universalmente riconosciuto come uno dei principali meccanismi responsabili dell'insorgere di fenomeni di auto-organizzazione spaziale [6, 7]. A partire dal famoso articolo di Murray, tale principio matematico si è infatti affermato come valido *trait d'union* tra il mondo matematico ed il mondo naturale, alimentando così un gran numero di fruttuose e stimolanti ricerche in ambito biomatematico.

Qualcosa di altrettanto sorprendente accadde, sempre a partire dalla seconda metà del '900, quando nel mondo scientifico si fece strada l'esperienza frattale [8].

L'anima frattale della Natura

> "La geometria frattale cambierà a fondo la vostra visione delle cose. Continuare a leggere è pericoloso. Si rischia di smarrire definitivamente l'immagine inoffensiva che si ha di nuvole, boschi, galassie, foglie, piume, fiori, rocce, montagne e di molte altre cose. Mai più tornerete a recuperare le interpretazioni di tutti i questi oggetti che finora vi erano familiari." (Micheal Barnsley [9]).

Con questo avvertimento Micheal Barnsley apre il suo libro *Fractals Everywhere* [9], mettendo in guardia il lettore sul fatto che il viaggio tra i frattali è un viaggio senza ritorno.

Sfidando il monito di Barnsley, il nostro viaggio tra i frattali inizia proprio immaginando un paesaggio: un bosco verde che rinfresca l'ambiente, una catena di montagne dalle forme frastagliate che si staglia all'orizzonte, un lago increspato da una brezza leggera e nubi bianche che adornano il cielo. Difficilmente potremmo rappresentare gli elementi di questa bellissima cornice naturale usando la geometria classica: la geometria di Euclide. Questa geometria, che da più di 2000 anni appartiene al bagaglio culturale dell'uomo (e dei matematici), è utilissima per descrivere il mondo...ma un mondo antropico, quello creato dall'uomo per l'uomo, un mondo cioè fatto di elementi regolari, linee rette e curve perfette. Ma, nel mondo della nostra bellissima cornice naturale in cui ogni elemento ha un aspetto irregolare, rugoso, frastagliato, la geometria di Euclide ha davvero ben poco da offrire perché, riflettendoci bene,

> "...le nubi non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste di un'isola non sono cerchi, le cortecce degli alberi non sono lisce e i fulmini non viaggiano secondo una linea dritta..." [10].

In altre parole, la natura ha un'anima frattale. Il termine **frattale** fu coniato nel 1975 dal matematico Benoit Mandelbrot nel libro *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension* [11] per descrivere alcuni oggetti matematici poco convenzionali in quanto irregolari, frammentati, rugosi. Questo neologismo deriva dal latino *fractus* e il suo significato è appunto frammentato.

Proprio come i frattali, il mondo della Natura è rugoso, increspato, irregolare anche se i suoi oggetti, le nubi, le montagne, i fulmini, gli alberi sembrano mostrare un ordine all'interno della loro irregolarità. Ci sono infatti strane proprietà capaci di accomunare un cavolo ad una felce o ad un fiocco di neve. Osservando ad esempio con una lente di ingrandimento un cavolo romano, ed ingrandendo sempre di più, si otterrà sorprendentemente ancora un cavolo romano. La proprietà che ha il cavolo di riprodurre se stesso, anche a scale molto piccole, viene detta autosimilarità. Il cavolo rivela dettagli ad ogni ingrandimento, ha cioè una struttura fine e ha un aspetto di ordinata irregolarità.

E, in natura, non è un caso isolato, basta osservare le felci, gli alberi, i fiocchi di neve. La loro struttura è un regalo dell'evoluzione perché è uno dei tanti modi in cui le forme viventi si sono adattate per sopravvivere e prosperare in un particolare habitat. Ad esempio, la forma del cavolo romano è vantaggiosa perché dà a questa pianta la possibilità di usufruire della luce da tutte le possibili angolazioni, consentendole di crescere bene anche in luoghi scarsamente illuminati.

Ma cosa è precisamente un frattale? Secondo Mandelbrot, "Un frattale è un oggetto geometrico fatto di parti in un certo senso simili al tutto" [10]. Gli oggetti frattali sono dunque figure geometriche, esattamente come il cerchio o il triangolo, ma possiedono alcune proprietà speciali, che li rendono capaci di cogliere quelle peculiari caratteristiche ravvisabili, ad esempio, nel cavolo romano. Un oggetto frattale ed un cavolo romano condividono infatti la proprietà dell'autosimilarità, della struttura fine e della ricorsività. Un frattale, quindi, non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano determinate condizioni analitiche o geometriche. La sua costruzione è invece basata su un algoritmo, ossia un metodo che deve essere utilizzato per disegnare la curva. E questo algoritmo non è mai applicato una volta sola: la procedura è iterata un numero infinito di volte. Mandelbrot era infatti fermamente convinto che fosse possibile trovare una nuova rappresentazione della realtà a partire dall'idea di base secondo cui, in natura, il piccolo non è nient'altro che una copia del grande. Applicando reiteratamente una semplicissima formula e avvalendosi dei computer IBM per la sua rappresentazione grafica, ottenne quello che oggi è considerato il più famoso dei frattali: il frattale di Mandelbrot.

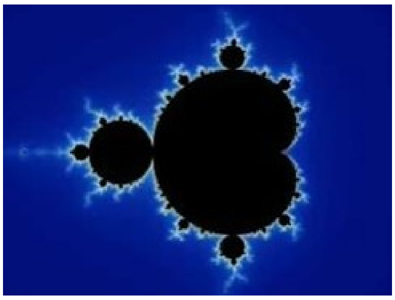

Figura 1: *Il frattale di Mandelbrot.*

Ma il frattale di Mandelbrot aveva celebri antenati...

I frattali prima dei frattali

Tra la fine dell'800 ed i primi anni del '900, matematici del calibro di Cantor, Peano, Hilbert, Von Koch e Sierpinski avevano creato degli strani oggetti matematici che si erano da subito rivelati completamente estranei agli schemi della geometria classica e, per questo, erano entrati a far parte della categoria dei mostri matematici dell'epoca [12]. Questi mostri matematici avrebbero solo in seguito trovato una collocazione teorica precisa, una propria identità frattale, grazie allo straordinario intuito di Mandelbrot che per primo formalizzò le proprietà di queste figure, evidenziando il loro stretto legame con le forme tipiche della natura.

In particolare, nel 1872, Cantor ricavò il suo mostro matematico partendo da un segmento di lunghezza unitaria, dividendolo in tre parti uguali, rimuovendo la parte centrale e ripetendo lo stesso procedimento sui due segmenti rimasti. Iterando questo procedimento all'infinito ottenne quella che è oggi nota come **polvere di Cantor** perché, all'infinito, la lunghezza degli intervalli diviene nulla e rimangono solo (infiniti) singoli punti. Dal canto suo Peano, nel 1890, scoprì una curva in grado di riempire il piano senza buchi, impressionando a tal punto Hibert da far guadagnare alla sua curva l'appellativo di **Curva Mostruosa**. Altri due esempi andarono ad arricchire la galleria di mostri matematici dell'epoca: la curva di Von Koch ed il triangolo di Sierpinski.

La curva di Von Koch fu ideata nel 1904 dal matematico svedese Heldge Von Koch che la definì come il limite di una sequenza infinita di curve sempre più grinzose.

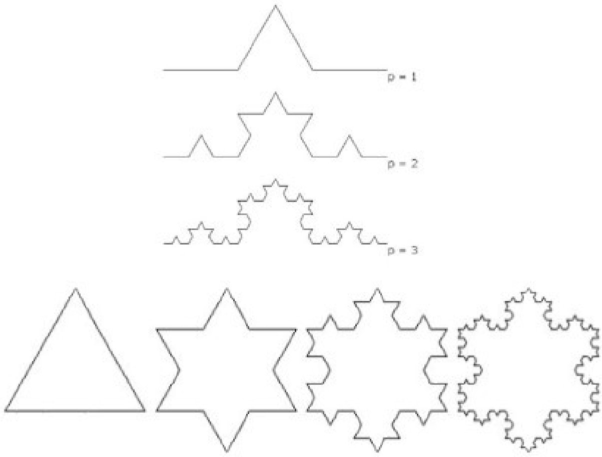

Figura 2: *Procedimento per generare la curva di Von Koch e il fiocco di neve di Von Koch.*

Tale curva limite aveva la curiosa proprietà di essere infinitamente lunga ma contenuta in un'area finita. Ciò che Von Koch non comprese era che questa curva di lunghezza infinita sarebbe stata un modello ideale per descrivere alcune forme del mondo reale, come le linee costiere. Aveva tutte le caratteristiche per essere un frattale e, ripensato all'interno della teoria di Mandelbrot, fu successivamente trattato come tale, divenendo il famoso **fiocco di neve di Von Koch**. Anche il cosiddetto **triangolo di Sierpinski**, ideato nel 1915 dal matematico Waclaw Sierpinski, è un chiaro esempio di struttura auto-similare, che si ripete cioè allo stesso modo su scale differenti. Il triangolo di Sierpinski si ottiene a partire da un triangolo equilatero pieno che viene suddiviso in quattro triangoli equilateri e quello centrale viene poi rimosso. I triangoli pieni rimasti vengono poi suddivisi allo stesso modo. Eseguendo la stessa procedura un numero infinito di volte si ottiene il triangolo di Sierpinski, un frattale.

Sierpinski introdusse il suo triangolo nel 1916, tuttavia questo oggetto era ben noto agli artisti già da alcuni secoli. I primi prototipi del triangolo di Sierpinski fecero la loro comparsa nel XII secolo sul pulpito del Duomo di Ravello, considerato un vero e proprio capolavoro dell'arte Cosmatesca, nella quale il frattale di Sierpinski si rivelò essere uno degli elementi più caratterizzanti.

Figura 3: *Procedimento iterativo per generare il triangolo di Sierpinski.*

Figura 4: *Dettagli di pavimenti cosmateschi adornati con triangoli di Sierpinski.*

Accolte con entusiasmo da alcuni, con scetticismo ed ostilità da altri, queste figure infinitamente irregolari e capaci di ripetersi indefinitamente su scale differenti, per diversi anni furono oggetto di studi che ne misero in luce le proprietà, in primis quella dell'auto-somiglianza. Gli ultimi ad occuparsene, intorno al 1920, furono i due matematici francesi Pierre Fatou e Gaston Julia, dopo di loro, il silenzio. Fino a quando, nel 1975, Benoit Mandelbrot rispolverò, dal dimenticatoio in cui erano piombati, questi oggetti esoterici ed inutilizzabili riabilitandoli ed inserendoli all'interno di una nuova geometria: la geometria frattale.

> "Nel presente saggio vengono studiati oggetti naturali assai diversi [...] ricorrendo all'aiuto di un'ampia famiglia di oggetti geometrici ritenuti finora esoterici e inutilizzabili, e che io mi propongo di dimostrare che meritano di essere presto integrati nella geometria elementare in ragione della semplicità, della diversità e della portata davvero straordinaria delle loro nuove applicazioni. Benchè il loro studio sia di pertinenza di discipline scientifiche diverse, tra cui la geometria, l'astronomia [...], gli oggetti naturali hanno in comune la caratteristica di essere di forma estremamente irregolare o interrotta; per studiarli ho concepito, messo a punto e largamente utilizzato una nuova geometria della natura. La nozione che fa da filo conduttore sarà designata con uno dei due neologismi sinonimi oggetto frattale e frattale da me concepiti per le necessità di questo libro e che si richiamano all'aggettivo latino fractus, che significa interrotto o irregolare" (Benoit Mandelbrot - Les objets fractals [11]).

In queste parole emerge tutta la forza unificante dell'idea di Mandelbrot: usare gli oggetti di questa nuova geometria come modelli per rappresentare gli elementi del mondo naturale, impresa fino ad allora impossibile, perché fuori dalla portata della geometria euclidea. Come evidenziato nel libro *The fractal geometry of Nature* [10], che Mandelbrot pubblicò nel 1982, le potenzialità applicative dei frattali apparivano infinite: dalla misurazione delle coste alla struttura dell'apparato circolatorio e respiratorio, dalle bolle di sapone alle nuvole e ai fiocchi di neve.

L'arte della rugosità

Per Benoit Mandelbrot i frattali erano strumenti di quella che lui definì **l'arte della rugosità** [13], espressione che indica l'aspetto aspro, ruvido e incostante del mondo e che è in qualche modo l'essenza delle forme della natura. Queste caratteristiche rendono arduo misurare, ad esempio, la lunghezza esatta di una linea costiera perché una costa è piena di anfratti e di irregolarità. Ma, in questa complessità, è possibile ravvisare un ordine, quello dato dall'auto-somiglianza.

Alla domanda: "Quanto misurano le coste della Gran Bretagna?", Mandelbrot rispondeva pubblicando, nel 1967, l'articolo *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* sulla prestigiosissima rivista Science [14].

In questo articolo sosteneva che la lunghezza della costa era funzione del passo di misurazione: se la costa viene misurata con passi sempre più corti, la sua lunghezza cresce indefinitamente. Essa possiede cioè un perimetro che tende all'infinito, pur essendo finita l'area ad esso sottesa. In definitiva, come conseguenza dell'auto-somiglianza, diminuendo la lunghezza del passo di misurazione, la lunghezza della costa aumenta perché si tiene conto di sinuosità sempre più piccole. Infatti, a differenza delle curve della geometria euclidea, che quando sono ingrandite sono assimilabili a delle linee rette, il frastagliamento delle linee costiere non si dissolve ingrandendo la scala.

Per definire in modo più quantitativo tale livello di frastagliamento, Mandelbrot utilizzò il concetto già esistente di dimensione di Hausdorff-Besicovitch ed introdusse la dimensione frattale, cioè una quantità statistica capace di indicare quanto completo appare un frattale per riempire lo spazio. Una linea costiera, ad esempio, ha una dimensione frazionaria compresa tra uno e due e, più la linea della costa è frastagliata, più tale numero è vicino a due. La dimensione frattale diviene dunque un indicatore della irregolarità e della complessità di una struttura: tanto più alto è il suo valore numerico, tanto più è irregolare e morfologicamente complessa la figura in esame. Dotata di questo strumento, la geometria frattale è dunque capace di analizzare e caratterizzare quantitativamente numerose forme della natura. Essa è in grado di classificare le coste ed i confini degli Stati in funzione del loro livello di irregolarità; non riesce a prevedere dove può cadere un fulmine, ma può prevedere quanto esso è frastagliato e può aiutare a comprendere meglio gli effetti degli uragani partendo dalla identificazione delle caratteristiche frattali delle nuvole e dei fulmini.

I frattali come impronte digitali del caos

Negli anni '80 i frattali divennero parte integrante di un'altra teoria matematica emergente, la teoria del caos che, proprio come i frattali, era destinata a rivoluzionare il campo della matematica e delle sue applicazioni [15]. Per molto tempo si è infatti pensato che la natura fosse governata da leggi di causa-effetto e che la descrizione dei fenomeni naturali fosse fondata sull'indissolubile binomio meccanicismo-determinismo. Almeno fino a quando Poincaré, studiando i pianeti del sistema solare, si accorse che i loro moti in realtà non erano prevedibili con precisione assoluta e, su tempi estremamente lunghi, diventavano addirittura impredicibili. Poincaré si era imbattuto in quella che sarebbe poi divenuta **la teoria del caos**, infrangendo un sogno che i matematici accarezzavano da secoli: descrivere e prevedere esattamente l'evoluzione futura di ogni sistema deterministico a partire dalle sue condizioni iniziali.

Si inizia dunque a profilare con grande evidenza il parallelismo tra geometria frattale e teoria del caos. Così come la geometria frattale metteva in luce tutta l'inadeguatezza della geometria euclidea nel descrivere le forme proprie del mondo naturale, così la teoria del caos evidenziava tutti i limiti del determinismo della scienza galileiana e della sua capacità di fare previsioni. Veniva dunque proposto un nuovo paradigma per identificare gli schemi nascosti che regolano i comportamenti naturali e che, fino ad allora, erano stati considerati delle semplici ed inspiegabili irregolarità. Che il legame tra geometria frattale e teoria del caos sia molto più forte di come possa apparire a prima vista, lo si intuisce osservando che, il primo oggetto matematico della teoria del caos, il celebre **attrattore a farfalla** del modello matematico di Edward Lorenz ha una struttura frattale.

Introdotto dal fisico Edward Lorenz nel 1963 nell'ambito di studi riguardanti il problema delle previsioni del tempo [16], questo sistema di equazioni differenziali debolmente non lineari, apparentemente molto semplice, mostrò per la prima volta che condizioni iniziali molto vicine potevano dar luogo a traiettorie che divergevano esponenzialmente. Questo nuovo fenomeno mise dunque in luce come, per certi sistemi di equazioni differenziali, i sistemi caotici, la benchè minima variazione o indeterminazione nelle condizioni iniziali poteva avere grandi conseguenze sull'andamento futuro del fenomeno, conseguenze difficili da prevedere in un'ottica esclusivamente deterministica. Questo tipo di comportamento prese il nome di **effetto farfalla**, dal titolo di una comunicazione di Lorenz "Predi-

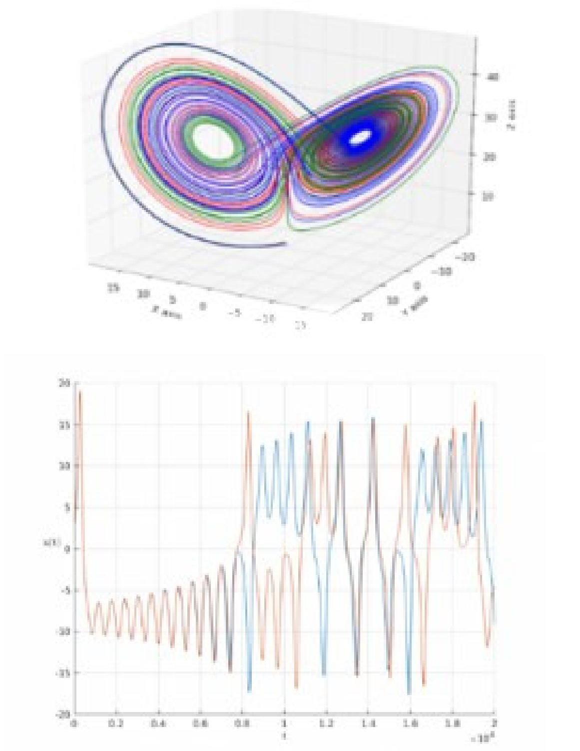

Figura 5: *Attrattore di Lorenz e dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.*

cibilità: può il battito d'ali di una farfalla in Brasile causare un tornado in Texas?" [17] e diede inizio ad un nuovo modo di descrivere i fenomeni naturali, quello del **caos deterministico**.

Quello di Lorenz fu il primo modello ad esibire un attrattore strano [18]. Per capire la portata di questa singolare proprietà occorre ricordare che le soluzioni dei sistemi dissipativi, pur partendo da condizioni iniziali diverse, tendono asintoticamente ad un insieme di stati, detto attrattore. Tale attrattore può essere un punto (nel caso che la dinamica di lungo periodo sia di tipo stazionario), una curva regolare detto ciclo limite (nel caso che la dinamica di lungo periodo sia di tipo periodico), un toro (nel caso la dinamica di lungo periodo sia di tipo quasiperiodico) oppure una struttura frattale (nel caso che il sistema esibisca una dinamica caotica) e, in tal caso, l'attrattore viene detto strano. Un attrattore strano è quindi un attrattore avente dimensione frattale e caratterizzato da una forte dipendenza dalle condizioni iniziali. C'è caos ogni qualvolta c'è una dinamica determinata da un attrattore strano. I frattali divengono dunque le impronte digitali del caos e il modello di Lorenz è il primo esempio di sistema di equazioni differenziali in bassa dimensionalità, in grado di generare frattali.

In fondo una dinamica caotica non è dissimile da ciò che si ottiene mescolando un impasto: il caos è cioè il frutto di un mescolamento. Infatti, sebbene traiettorie che partono da punti vicini si separano con velocità esponenziale, grazie ad un meccanismo di *streching* (stiramento) e *folding* (ripiegamento), le traiettorie che partono sull'attrattore rimangono comunque confinate in una regione di spazio limitata. In termini quantitativi, l'effetto del mescolamento è descritto dal concetto matematico di transitività topologica, secondo cui il sistema evolve nel tempo in modo che ogni data regione nel suo spazio delle fasi si sovrappone indefinitamente a qualsiasi altra regione. Invece, il grado di sensibilità alle condizioni iniziali è misurato dall'esponente di Lyapunov che rappresenta il tasso di divergenza esponenziale di due orbite che partono infinitesimamente vicine. Se tale esponente di Lyapunov è positivo, allora il sistema presenta una dipendenza sensibile dai dati iniziali e il suo reciproco fornisce il tempo caratteristico del sistema, il tempo cioè a partire dal quale si manifesta il caos. Il termine **caos deterministico** non è pertanto sinonimo di disordine ma piuttosto di predicibilità solo a breve termine. Infatti, a differenza dei sistemi deterministici (quelli per cui conoscendo le condizioni iniziali si può prevedere l'evoluzione futura del sistema in ogni istante), i sistemi caotici diventano impredicibili in tempi brevi perché, qualunque incertezza sullo stato iniziale cresce con legge esponenziale. Per questi sistemi esiste così un limite, un orizzonte temporale di previsione, oltre il quale il futuro non può essere previsto.

Le strutture frattali sono il risultato di dinamiche non lineari caotiche sottostanti, cioè testimonianze tangibili della natura caotica del fenomeno che si è modellizzato. Dinamiche caotiche e strutture frattali sono dunque espressioni diverse, ma intimamente legate, dello stesso mondo: il mondo della natura.

Frattali...al cinema

Sia la teoria del caos che la geometria frattale hanno potuto svilupparsi ed emergere grazie alla potenza di calcolo dei moderni calcolatori che,

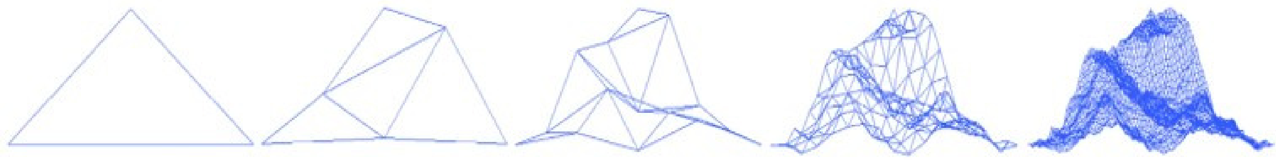

Figura 6: *Esempio di procedimento iterativo usato per generare sfondi montani realistici*

negli anni, sono divenuti sempre più raffinati e potenti consentendo loro una varietà enorme di applicazioni: dalla biologia alla medicina, dalla finanza alle scienze sociali, dalla musica all'arte.

La potenzialità della geometria frattale di produrre immagini molto realistiche di pianeti, satelliti, nubi e montagne è stata utilizzata, fin dai primi anni '80, nel settore dell'intrattenimento e del cinema [19]. *Avatar*, famosissimo film di James Cameron del 2009, ha dimostrato cosa fosse possibile ottenere con i frattali nel magico mondo di Pandora, i cui incantevoli paesaggi hanno suscitato meraviglia e stupore. Questi paesaggi sono espressione tangibile della potenza della matematica frattale: in alcuni casi ispirati a paesaggi reali, come le bellissime montagne fluttuanti che richiamano i monti Huangshan in Cina, in altri casi frutto della fervida fantasia di James Cameron. Ma prima di *Avatar*, altri film avevano già utilizzato le straordinarie potenzialità di questa nuova matematica, dando vita ad una vera e propria rivoluzione nel mondo dell'animazione digitale. Infatti, a pochi anni dalla pubblicazione del libro di Mandelbrot *Les Objets Fractales* [11], Loren Carpenter, ispirandosi a quella lettura, ideò degli algoritmi innovativi basati su iterazioni frattali per realizzare un simulatore di volo. L'obiettivo era quello di creare uno sfondo montuoso quanto più verosimile possibile. Carpenter considerò un paesaggio composto da quattro macro-triangoli che suddivise poi in quattro triangoli ciascuno.

Ripetendo questo procedimento per un numero molto alto di iterazioni, ottenne una montagna frastagliata ed estremamente realistica che, nel 1980, fu presentata nel cortometraggio animato *Vol libre* [20]

Il risultato fu talmente impressionante che Carpenter fu incaricato di generare non solo uno sfondo montuoso, ma addirittura un intero pianeta. Nacque così la famosissima *Genesis Sequence* che, in *Star Trek II - L'ira di Khan (1982)*, mostra la genesi della vita su un pianeta completamente morto, divenendo la prima sequenza in un film ad essere interamente generata al computer.

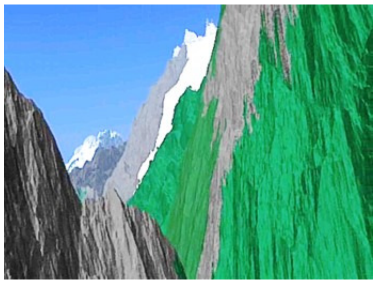

Figura 7: *Un fotogramma modificato dal cortometraggio* Vol libre

Figura 8: *Alcuni fotogrammi simbolo del film* Viaggio nella luna (1902).

Siamo davvero lontani anni luce dalle affascinanti scene di *Viaggio nella luna (1902)*, [21] uno dei capolavori del cinema di fantascienza ai suoi esordi. Una delle immagini iniziali del film, la navicella spaziale che precipita sull'occhio della Luna, è entrata nell'immaginario collettivo divenendo una di quelle sequenze che hanno fatto la storia del cinema. Rivedere questa scena ci dà una misura precisa di quanto i frattali abbiano cambiato il volto del cinema fantascientifico.

Il segreto di tanto successo

Ma qual è il segreto di tanto successo?

> C'è qualcosa di familiare nei frattali. Io ho avuto subito questa sensazione: la primissima volta che li ho visti ed ero

> certamente la prima persona ad osservarli! Non c'era assolutamente la possibilità che qualcuno fosse riuscito a scorgerli prima di me... Ma dopo alcuni giorni o forse ore, se non minuti, mi apparivano già familiari. Vi riconoscevo delle proprietà che avevo già visto da qualche parte. Ma dove? Bene, innanzitutto nei fenomeni, ma anche nell'arte (Benoit Mandelbrot) [22].

Figura 9: *Esempi di frattali nell'arte: dall'architettura alla pittura*

E l'arte è difatti ricca di forme frattali, come se le idee alla base di questa geometria siano qualcosa di profondamente e atavicamente insito nell'animo umano e nelle sue manifestazioni. Il fascino dei frattali risiede forse nel fatto che, pur essendo figure complesse, hanno una complessità che non ci disorienta, perché nasce da leggi semplici ed è in sostanza un ripetersi, quasi rassicurante, di un'idea iniziale.

Benoit Mandelbrot ha saputo ben scrutare il libro della natura citato da Galilei, svelando alcuni dei suoi misteri...

> Non ho mai avuto la sensazione di inventare. Non ho mai avuto la sensazione che la mia immaginazione fosse abbastanza ampia da poter inventare cose straordinarie a tal punto. Erano lì, solo che nessuno le aveva mai viste prima. È meraviglioso. L'obiettivo della scienza è iniziare dal caos e spiegarlo con una formula semplice...e questo è una sorta di sogno della scienza (Benoit Mandelbrot) [22].

E in questo sogno, che grandi sognatori come Galilei, Turing, Mandelbrot, Lorenz hanno contribuito ad alimentare, Matematica e Natura sono e saranno sempre l'una parte integrante dell'altra, due aspetti indissolubili dello stesso magico universo: l'universo della Conoscenza.

Ringraziamenti

Questo articolo è stato realizzato sotto gli auspici del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica (GNFM-Indam) ed è dedicato alla memoria del Prof. Claudio Tebaldi a cui queste tematiche erano particolarmente care. Negli anni della sua permanenza presso l'Ateneo del Salento, il Prof. Tebaldi diede inizio ad un interessante filone di ricerca inerente lo studio e le applicazioni dei sistemi dinamici non lineari e della teoria delle biforcazioni. Fu inoltre tra i promotori della Laurea Honoris Causa in Matematica conferita, nel 1992, dall'Ateneo del Salento al Prof. Edward Lorenz, padre della teoria del caos.

Ringrazio Claudio per avermi fatto scoprire, durante le sue lezioni, i sistemi dinamici come strumento per modellizzare il mondo e per avere sempre incoraggiato la mia matematica ispirata dalla biologia. Su questi punti cardine si è poi sviluppata la mia attività di ricerca che, ancora adesso, cerca di far emergere il caos dall'apparente ordine delle cose naturali e mi consente di guardare la realtà con occhi frattali.

[1] G. Galilei: *Il Saggiatore, nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella Libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano, scritto in forma di lettera all'ill.mo et rever.mo mons.re d. Virginio Cesarini acc.o linceo m.o di camera di N.S..* Giacomo Mascardi, Roma (1623).

[2] D. W. Thompson: *On Growth and Form.* Cambridge University Press, Cambridge (1917).

[3] A. M. Turing: "The chemical bases of morphogenesis", *Phil. Trans. Royal Soc. London* **B 237** (1952) 37.

[4] R. Kipling: *Just so stories.* Doubleday, Garden City, New York (1907).

[5] J. D. Murray: "How the Leopard Gets Its Spots", *Scientific American* **258** (1988) 80.

[6] J. D. Murray: *Mathematical Biology II; Spatial models and biomedical applications.* Springer, Berlino (2002).

[7] D. Lacitignola: “The Mathematical Beauty of Nature and Turing Pattern Formation”, *Matematica, Cultura e Società Rivista dell’Unione Matematica Italiana* **Serie I, Vol.1, N. 2** (Agosto 2016) .

[8] H. O. Peitgen, P. H. Richter: *La bellezza dei frattali.* Bollati-Boringhieri, Torino (1987).

[9] M. F. Barnsley: *Fractals Everywhere.* Dover, città (2012).

[10] B. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman and Company, New York (1982).

[11] B. B. Mandelbrot: *Les objets fractals - Forme, hasard et dimension.* Flammarion, Parigi (1975).

[12] G. Bianciardi: “Geometria Frattale”, *Scienze e Ricerche* **7** (2015) 11.

[13] B. B. Mandelbrot, *Fractals and the art of roughness*, su ted.com, febbraio 2010

[14] B. B. Mandelbroit: “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”, *Science, New Series* **156** (1967) 636.

[15] J. Gleick: *Caos.* Rizzoli, Milano (1989).

[16] E. N. Lorenz: “Deterministic Nonperiodic Flow”, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130.

[17] E. N. Lorenz, "Predictability", American Association Advance of Science 139th meeting, Washington D. C., Dec. 1972.

[18] C. Sparrow: *The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors.* Springer, Berlino (1982).

[19] A. Grossi: “Quando le cose si fanno complesse: i frattali in natura”, *MATEpristem* (2017) .

[20] kottke.org. 2009. Vol Libre, an amazing CG film from 1980. [online] Available at: http://kottke.org/09/07/vol-libre-an-amazing-cg-film-from-1980

[21] Viaggio nella Luna, su Moving Image Archive, Internet Archive. https://archive.org/details/Levoyagedanslalune

[22] Intervista a Mandelbrot all’interno del documentario "Fractals: The Colors of Infinity" di Arthur Clarke (1994) https://topdocumentaryfilms.com/fractals-colors-infinity/ Dal minuto 45:05-al minuto 49:12.

Deborah Lacitignola: è Professore Associato in Fisica Matematica all’Università di Cassino e del Lazio Meridionale. La sua attività di ricerca si avvale degli strumenti propri dei sistemi dinamici non lineari e della teoria delle biforcazioni e concerne lo studio e lo sviluppo di modelli matematici con applicazioni in biologia, chimica e scienze della vita.