La lezione mancata

Il Teorema di Liouville sull'integrabilità

Luigi Martina *Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi Università del Salento, INFN Sezione di Lecce*

In questo contributo presenteremo e discuteremo un celebre teorema della Meccanica Analitica.

L'enunciato

La proprietà dei sistemi dinamici detta *integrabilità per quadrature* richiede di scrivere la soluzione delle equazioni del moto tramite un numero finito di operazione algebrico/analitiche, inclusa l'inversione di funzioni, e il calcolo di integrali di funzioni (quest'ultima è *la quadratura*). Il metodo di Hamilton-Jacobi e il teorema di Liouville ci mettono a disposizione dei metodi generali per l'integrazione. Il rovescio della medaglia riguarda il fatto che tali metodi non sono applicabili a tutti i sistemi dinamici immaginabili, ma solo a quelli che presentano dipendenza continua e differenziabile dalle condizioni iniziali, almeno in certo aperto di esse. Perturbazioni, anche piccole, di questi sistemi possono dar luogo a situazioni non più integrabili nel senso indicato appena sopra. Tuttavia, esistono teoremi (per esempio il cosiddetto Teorema KAM), che consentono di controllare entro certe condizioni, gli effetti di tali perturbazioni.

L'enunciato del teorema di Liouville è

Teorema 1. *Se per un sistema Hamiltoniano con n gradi di libertà sono noti n integrali primi del moto del moto che siano:*

1. *funzionalmente indipendenti e analitici,*
2. *in involuzione,*

allora il problema di integrazione del sistema delle equazioni del moto si riduce alle quadrature.

Questo Teorema va posto in stretta relazione al metodo di Hamilton-Jacobi , secondo il quale l'integrazione di un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà va ricondotta alla determinazione di un integrale completo di una equazione alle derivate parziali in $n+1$ variabili indipendenti.

Nella trattazione che segue adotteremo un profilo *tradizionale* di dimostrazione, cioé che può essere rintracciato nella maggior parte dei manuali di Meccanica Analitica. Perciò , senza voler trascurare alcun autore in questa vasta manualistica, si farà riferimento solo al classico [1] Vol. II, P. II, Cap X-44. In tal modo il lettore che faccia riferimento, per esempio, al manuale [2] Cap 10, non avrà alcuna difficoltà a seguire il ragionamento condotto con metodi essenzialmente analitici. Naturalmente esistono dimostrazioni molto più moderne ed eleganti, a partire da quella che si ritrova al Cap. X di [3]. Questo contributo ha ne significativamente ampliato il significato e valore, facendo parlare di Teorema di Liouville-Arnold. Tuttavia, per seguire questa strada dovrebbe seguire l'entusiasmante, ma meno familiare strada, della geometria simplettica. A questo proposito, non possiamo evitare di citare i magistrali Appunti di Meccanica Analitica del compianto Boris Dubrovin [4]. Un buon compromesso tra aspetti matematici e fisici, come introduzione ai metodi geometrici e algebrici in Meccanica Classica, si può ritrovare nel manuale di Gaetano Vilasi [5].

Il metodo di Hamilton - Jacobi

Sia assegnato un sistema hamiltoniano della forma

$$\dot{p} = \{p, H\}\,, \qquad \dot{q} = \{q, H\}\,, \qquad (k = 1, ..., n), \tag{1}$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ indica le parentesi di Poisson definite sullo spazio delle fasi Γ, a $2n$ dimensioni, e H è una funzione Hamiltoniana $H = H\,(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ di $\Gamma \to \mathbb{R}$.

Il metodo di Hamilton-Jacobi consiste nel cercare una trasformazione canonica $T_c : (p_k, q_k) \to (\pi_h, \chi_h)$ di Γ in se stesso, cioé tale che

1. T_c lasci immutate le parentesi di Poisson

$$\begin{aligned} \{\chi_h, \pi_k\} &= \{q_h, p_k\}\,, \\ \{\chi_h, \chi_k\} &= \{q_h, q_k\} \\ \{p_h, p_k\} &= \{\pi_h, \pi_k\}\,; \end{aligned} \tag{2}$$

2. cambi la l'Hamiltoniana nella più semplice possibile cioé

$$H \to K = 0.$$

Se si riesce a trovare una tale trasformazione, le equazioni del moto si riducono al sistema

$$\dot{\pi}_k = 0, \qquad \dot{\chi}_k = 0 \quad (k = 1, ..., n), \tag{3}$$

l'integrazione del quale è immediata. Dalla teoria delle trasformazioni canoniche si sa che la condizione 1. è soddisfatta se esiste una funzione generatrice

$$F = F(q_1, ..., q_n, \pi_1, ..., \pi_n)\,,$$

tale che

$$p_h = \partial_{q_h} F, \qquad \chi_h = \partial_{\pi_h} F, \tag{4}$$

con la condizione di regolarità per F

$$J = \det \frac{\partial^2 F}{\partial_{q_h} \partial_{\pi_k}} \neq 0. \tag{5}$$

Inoltre, la nuova Hamiltoniana prende la forma

$$K = (H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F)|_{q_h = q_h(\pi_j, \chi_j)}, \tag{6}$$

dove si è usata la seconda delle (4) per ottenere $q_h = q_h(\pi_j, \chi_j)$.

Chiaramente, per ottenere nulla l'Hamiltoniana K, si impone l'equazione l'equazione (detta di Hamilton-Jacobi)

$$H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F = 0\,, \tag{7}$$

alle derivate parziali nelle variabili $(q_1, ..., q_n, t)$.

Di tale equazione bisogna ora trovare un *integrale completo* , cioé una soluzione dipendente da $(q_1, ..., q_n, t)$ e da n costanti di integrazione $(\pi_1, ..., \pi_n)$. Quindi, fissate le condizioni iniziali (p_k^0, q_k^0) al tempo t_0, grazie alla trasformazione canonica determinata dall'eq. (7), si determinano le costanti $\pi_1^0, \ldots, \pi_n^0, \chi_1^0, \ldots \chi_n^0$, che sono anche le soluzioni del sistema (3). In conclusione, la conoscenza di un integrale completo F dell'eq. (7) è sufficiente per determinare completamente la soluzione delle equazioni del moto (2).

D'altra parte non è nemmeno necessario essere troppo stringenti con la richiesta che la trasformazione canonica F conduca ad una Hamiltoniana nulla. Infatti è sufficiente che la nuova Hamiltoniana sia una funzione delle sole variabili π_k, cioé

$$K = K(\pi_1, ..., \pi_n), \tag{8}$$

perché in tal caso le equazioni (3) diventano

$$\dot{\pi}_k = 0, \qquad \dot{\chi}_k = \partial_{\pi_k} K \quad (k = 1, ..., n).. \tag{9}$$

Anche questo sistema hamiltoniano si integra immediatamente, nella forma

$$\pi_h(t) = \pi_h^0, \chi_h(t) = \chi_h^0 + \partial_{\pi_h} K|_{(\pi_1^0, ..., \pi_n^0)} t, \tag{10}$$

dove (π_h^0, χ_h^0) sono i dati iniziali per il sistema. Corrispondentemente, l'equazione di Hamilton - Jacobi, della quale occorre determinare l'integrale completo è della forma

$$H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F = K\,(\pi_h)\,. \tag{11}$$

Una volta determinato un integrale completo $F = F(q_1, ..., q_n, \pi_1, ..., \pi_n)$ di questa equazione, usando le prime n equazioni del sistema (4), si possono esplicitamente ottenere le n funzioni $\pi_h = \pi_h(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$. Esse sono *integrali primi* del moto per il sistema (2) in virtù delle prime n equazioni in (9). Inoltre, usando le ultime n equazioni in (4) e risolvendo per le $q_h = q_h(\pi_1, ..., \pi_n, \chi_1, ..., \chi_n)$, si ottiene una soluzione esplicita delle equazioni del moto, sostituendovi le espressioni in (10).

Le variabili $(\pi_1, \ldots, \pi_n, \chi_1, \ldots, \chi_n)$ vengono chiamate *variabili azione-angolo*.

Integrali primi del moto

Da quanto visto sopra concludiamo che se è possibile trovare un integrale completo dell'eq. di Hamilton-Jacobi (11) allora è possibile integrare le equazioni di Hamilton originarie e trovare n integrali primi del moto.

Poiché la trasformazione canonica mantiene la struttura delle parentesi di Poisson, allora se (p_h, q_h) sono variabili canoniche, lo sono anche le (π_h, χ_h). In particolare questo significa che $\forall h, k = 1, ..., n$ si ottiene la relazione di commutazione

$$\begin{aligned} \{ \quad & \pi_h(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n), \\ & \pi_k(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) \quad \} = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

In altri termini l'esistenza di un integrale completo dell'eq. di Hamilton-Jacobi garantisce l'esistenza di n integrali del moto in involuzione. Il problema risolto dal teorema di Liouville, enunciato nella sezione 1, consiste nel dimostrare il viceversa.

Per procedere nella direzione indicata, dapprima consideriamo un generico sistema dinamico (non necessariamente hamiltoniano quindi) nelle variabili $x = (x_1, ..., x_m) \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\dot{x}_i = X_i(x, t), (i = 1, ..., m), . \qquad (13)$$

Se esso possiede un integrale primo $f = f(x, t)$, cioé una funzione sullo spazio delle fasi tale che $\dot{f} = \partial_{x_i}\dot{x}_i + \partial_t f \equiv 0$, questo consente di eliminare un grado di libertà , risolvendo l'equazione

$$f(x, t) = f_0. \qquad (14)$$

Nello spazio delle variabili x essa definisce una iper-superficie a $m - 1$ dimensioni. Quindi, sotto le condizioni di invertibilità di f, è possibile determinare una delle x_i in termini di tutte le altre. Inoltre la traiettoria definita dalla soluzione giace completamente sulla menzionata iper-superficie. Infine, se al variare di f_0 le corrispondenti iper-superfici sono regolari e preservano la loro dimensionalità . Esse si chiamano *foglie* e si dice che esse *fogliettano* lo spazio delle fasi. In conclusione

Enunciamo ora il seguente

Teorema 2. *l'esistenza di un integrale del moto per il sistema generico del primo ordine* (13) *consente di ridurre di una unità il numero di variabili dinamiche incognite.*

Di conseguenza ogni ulteriore integrale del moto riduce di una unità la complessità del problema originario e ne occorrerebbero esattamente $m - 1$ per ricondursi ad una sola equazione differenziale, che determina il moto lungo la traiettoria definita dalla intersezione delle $m - 1$ iper-superfici.

Tuttavia i sistemi hamiltoniani posseggono una struttura ulteriore, derivante dalle parentesi di Poisson, che potrebbe essere sfruttata per affrontare la questione della riduzione del numero di variabili dipendenti.

Facciamo allora l'ipotesi di conoscere un integrale del moto del sistema (2), indicato con $f = f(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$, il che significa

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{q_i} f \dot{q}_i + f_{p_i} \dot{p}_i) \equiv 0. \qquad (15)$$

Ma dalle eq. di Hamilton, e per le proprietà delle parentesi di Poisson, si ha pure che

$$\dot{f} = \{f, H\} \equiv 0. \qquad (16)$$

Se isoliamo una particolare coppia di variabili coniugate, diciamo (p_1, q_1), l'ultima relazione si può anche scrivere nella forma

$$\{f, H\}_1 = -\{f, H\}_{\hat{1}}, \qquad (17)$$

dove con $_1$ indichiamo le parentesi sul sottospazio individuato dalla coppia di coordinate indicizzate con 1, mentre quelle che riguardano tutte le altre variabili è individuato da $_{\hat{1}}$.

Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema delle funzioni implicite, risolviamo rispetto a p_1 l'equazione

$$\begin{aligned} & f(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = f_0 \\ \Longrightarrow \quad & p_1 = \phi\left(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Inoltre, per ogni $i = 1,...,n$, si ha pure che

$$\begin{aligned} \partial_{p_{\hat{1}}}\phi\left(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}\right) &= -\frac{\partial_{p_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f}, \\ \partial_{q_i}\phi\left(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}\right) &= -\frac{\partial_{q_i} f}{\partial_{p_1} f} \end{aligned} \tag{19}$$

Come in precedenza, queste relazioni ci dicono che la traiettoria è confinata ad una sottovarietà di dimensione $2n-1$ definita da (18), ma per la componente del campo vettoriale hamiltoniano lungo p_1 deve risultare

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = -\partial_{q_1} H = \\ \partial_{p_{\hat{1}}}\phi\, \dot{p}_{\hat{1}} + \partial_{q_1}\phi\, \dot{q}_1 + \partial_{q_{\hat{1}}}\phi\, \dot{q}_{\hat{1}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Sostituendo le relazioni (19) in (20), si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 \;=\; & \frac{1}{\partial_{q_{\hat{1}}}\phi}\left[-\partial_{q_1} H - \partial_{p_{\hat{1}}}\phi\, \dot{p}_{\hat{1}} - \partial_{q_{\hat{1}}}\phi\, \dot{q}_{\hat{1}}\right] = \\ & -\frac{\partial_{p_1} f}{\partial_{q_1} f}\left[-\partial_{q_1} H + \frac{\partial_{p_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f}\dot{p}_{\hat{1}} + \frac{\partial_{q_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f}\dot{q}_{\hat{1}}\right] = \\ & \frac{1}{\partial_{q_1} f}\left[\partial_{p_1} f\, \partial_{q_1} H - \partial_{p_{\hat{1}}} f\, \dot{p}_{\hat{1}} - \partial_{q_{\hat{1}}} f\, \dot{q}_{\hat{1}}\right] = \\ & \frac{1}{\partial_{q_1} f}\left[\partial_{p_1} f\, \partial_{q_1} H - \{f, H\}_{\hat{1}}\right] = \\ & \frac{1}{\partial_{q_1} f}\left[\partial_{p_1} f\, \partial_{q_1} H + \{f, H\}_{1}\right] = \\ & \frac{\partial_{q_1} f\, \partial_{p_1} H}{\partial_{q_1} f} = \\ & \partial_{p_1} H \end{aligned} \tag{21}$$

che è esattamente l'equazione del moto per q_1.

In altri termini anche la componente del campo hamiltoniano lungo la direzione di q_1 è automaticamente definita dalla restrizione al moto imposta dall'esistenza dell'integrale del moto f e dalla corrispondente ipersuperficie definita da (18). Si arriva ad enunciare il seguente teorema di Lie sui sistemi hamiltoniani

Teorema 3. *Se un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà ammette 1 integrale del moto, il problema si riduce ad integrare ancora un sistema hamiltoniano a $n-1$ gradi di libertà , cioè un sistema di $2(n-1)$ equazioni hamiltoniane.*

Dimostrazione del Teorema di Liouville

Da quanto si è visto in precedenza, dobbiamo presumere che n integrali del moto per un sistema hamiltoniano siano sufficienti per ridurre la sua risoluzione alle sole quadrature. Tuttavia dobbiamo specificare meglio le condizioni sotto le quali questa riduzione possa avvenire.

Supponiamo allora di essere in possesso di n integrali primi del moto $\{f_1,...,f_n\}$, che siano indipendenti ed *analitici* nelle loro variabili. Questa prima richiesta è equivalente a dire che in ogni punto dello spazio delle fasi le iper-superfici definite da equazioni della forma

$$f_r(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = \pi_r \tag{22}$$

non si possano in alcun modo *sovrapporre* o ottenere le une dalle altre, anche variando le costanti π_r. Questa proprietà globale, si può formulare a livello infinitesimo richiedendo che i piani tangenti a tali superfici siano indipendenti. Ma i piani tangenti sono definiti univocamente dai gradienti delle funzioni $\{f_1,...,f_n\}$ ad essi ortogonali. Pertanto una forma di tale condizione è che

$$I) \quad \text{rank}\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)} = n \tag{23}$$

Ora si definisca l'intersezione di tutte le superfici di livello della forma (22)

$$\begin{aligned} M_\pi \;=\; & \{(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) : \\ & f_r(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = \pi_r, \\ & r = 1,...,n\} \subseteq \Gamma. \end{aligned} \tag{24}$$

Per quanto visto sopra si ha $\dim(M_\pi) = n$, ed è possibile trovare n coordinate su di esso.

Per fare questo bisogna invertire il sistema di equazioni definenti M_π, che in particolare impone una più restrittiva condizione rispetto alla $I)$ sugli integrali del moto. Precisamente si deve verificare che

$$II) \quad \text{rank}\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(p_1,...,p_n)} = n \tag{25}$$

che è chiaramente compatibile con la relazione (23).

Questa proprietà ci permette di definire su M_π

il sistema di coordinate

$$p_h = \phi_h(q_1, ..., q_n; \pi),$$
$$h = 1, ..., n \text{ e } \pi = (\pi_1, ..., \pi_n). \qquad (26)$$

Si osservi ora che sullo spazio delle $(q_1, ..., q_n)$ si verifica che

$$\tilde{f}_r(q_1, ..., q_n) = f_r(\phi_1, ..., \phi_n; \pi) = \pi_r$$
$$\forall r = 1, \ldots, n \qquad (27)$$

Quindi si ha pure che

$$\partial_{q_h} \tilde{f}_r(q_1, ..., q_n) \equiv 0 \quad \forall\, h = 1, \ldots, n. \qquad (28)$$

Esplicitamente, $\forall h, r = 1, ..., n$, queste derivate prendono la forma

$$\partial_{q_h} f_r \quad + \quad \sum_{s=1}^{n} \partial_{p_s} f_r \; \partial_{q_h} \phi_s(q_1, ..., q_n; \pi)|_{p_h=\phi_h}$$
$$\equiv \quad 0 \; . \qquad (29)$$

Tenendo conto del fatto che ognuna delle f_r è un integrale del moto e che, per ogni traiettoria possibile, le p_s si possono esprimere come certe funzioni *analitiche* delle q_h, allora l'espressione precedente può essere estesa a tutto lo spazio delle fasi Γ, assumendo la forma

$$\partial_{q_h} f_r = \sum_{s=1}^{n} \partial_{p_s} f_r \; \partial_{q_h} \; [p_s - \phi_s(q_1, ..., q_n; \pi)] \; . \qquad (30)$$

Inoltre, usando l'identità

$$\partial_{p_h} [p_s - \phi_s(q_1, ..., q_n; \pi)] = \delta_{h,s}, \qquad (31)$$

in maniera analoga possiamo considerare vera su tutto Γ la relazione

$$\partial_{p_h} f_r =$$
$$\sum_{s=1}^{n} \partial_{p_s} f_r \; \partial_{p_h} \; [p_s - \phi_s(q_1, ..., q_n; \pi)] \; . \qquad (32)$$

A questo punto è possibile esprimere i prodotti di derivate di due f_r nelle forme equivalenti

$$\partial_{q_h} f_r \; \partial_{p_h} f_s =$$
$$\sum_{t,z=1}^{n} \partial_{p_t} f_r \; \partial_{p_z} f_s \; \partial_{q_h} [p_t - \phi_t] \; \partial_{p_h} \; [p_z - \phi_z] =$$
$$\sum_{t,z=1}^{n} \partial_{p_t} f_r \; \partial_{p_z} f_s \; \partial_{p_h} [p_t - \phi_t] \; \partial_{q_h} \; [p_z - \phi_z] \, .$$

Conseguentemente, tenendo conto delle loro tipiche proprietà , le parentesi di Poisson si possono esprimere nella forma

$$\{f_r, f_s\} = \qquad (33)$$
$$\sum_{t,z=1}^{n} \partial_{p_t} f_r \; \partial_{p_z} f_s \; \{p_t - \phi_t, \; p_z - \phi_z\} \, ,$$

che vale per ogni $r, s = 1, ..., n$.

La matrice $n \times n$ $(\{f_r, f_s\})$, costituta da tutte le possibili parentesi di Poisson tra gli n integrali del moto a disposizione, sarà quindi espressa anche nella forma di prodotto tra matrici

$$(\{f_r, f_s\}) = \left(\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(p_1, ..., p_n)}\right)^T \cdot$$
$$(\{p_t - \phi_t(q_1, ..., q_n; \pi), p_z - \phi_z(q_1, ..., q_n; \pi)\} \cdot$$
$$\left(\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(p_1, ..., p_n)}\right) . \qquad (34)$$

Considerata la condizione *II)* di invertibilità (25), si giunge alla particolare equivalenza

$$III) \quad (\{f_r, f_s\}) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$(\{p_t - \phi_t(q_1, ..., q_n; \pi),$$
$$p_z - \phi_z(q_1, ..., q_n; \pi)\}) = 0 \qquad (35)$$

su tutto lo spazio Γ. Data la rilevanza della condizione *III)*, assumiamo l'involutività di tutti gli n integrali del moto a ipotesi del teorema di Liouville.

Il calcolo esplicito delle parentesi di Poisson nella tesi di (35) conduce alle relazioni

$$\{p_t - \phi_t(q_1, ..., q_n; \pi), p_z - \phi_z(q_1, ..., q_n; \pi)\}$$
$$= \partial_{q_t} \phi_z - \partial_{q_z} \phi_t = 0. \qquad (36)$$

Ricordando che le ϕ_h sono definite solo sulle coordinate q_k, la relazione precedente equivale ad affermare che, a meno di costanti, esiste una funzione $W(q_1, ..., q_n; \pi)$ tale che

$$\phi_h = \partial_{q_h} W(q_1, ..., q_n; \pi). \quad (37)$$

Ma allora per le (26) si ha pure

$$p_h = \partial_{q_h} W(q_1, ..., q_n; \pi), \quad (38)$$

quindi anche

$$\partial^2_{q_h,\pi_k} W = \partial_{\pi_k} \phi_h = \left(\{\partial_{p_i} f_r\}^{-1} \right) . \quad (39)$$

Per la condizione *II)* in (25), la matrice jacobiana $\left(\partial^2_{q_h,\pi_k} W\right)$ è sicuramente non degenere e definisce una trasformazione canonica, dove le nuove coordinate coniugate alle π_h sono definite da

$$\chi_h = \partial_{\pi_h} W(q_1, ..., q_n; \pi) . \quad (40)$$

Tale trasformazione canonica

$$(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) \to (\pi_1, ..., \pi_n, \chi_1, ..., \chi_n)$$

dà luogo ad una nuova Hamiltoniana

$$K = H(p_i(\pi, \chi), q_i(\pi, \chi)). \quad (41)$$

Ma poiché già sappiamo che le π_h sono le n costanti del moto, in realtà la funzione K è indipendente dalle χ_k. Pertanto le equazioni di Hamilton si riducono alla forma

$$\dot{\pi}_h = 0, \quad \dot{\chi}_h = \partial_{\pi_h} K(\pi_1, ..., \pi_n). \quad (42)$$

Ma la loro integrazione è ovvia, cioé

$$\begin{aligned} &\pi_h(t) = \pi_h^0, \\ &\chi_h(t) = \partial_{\pi_h} K(\pi_1, ..., \pi_n)|_{\pi_h^0} t + \chi_h^0, \end{aligned} \quad (43)$$

dove le π_h^0 e le χ_h^0 sono costanti arbitrarie.

In questo modo si è fatto vedere che l'esistenza di n integrali del moto, che godono delle condizioni I) e III) e sono analitici, conducono allo stesso risultato ottenuto con il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi, secondo lo schema riportato nelle relazioni (9) - (11).

Più in generale la dimostrazione può essere estesa al caso di integrali del moto dipendenti dal tempo e ad hamiltoniani nulli. Quindi le circostanze descritte dal teorema di Liouville sono equivalenti a risolvere l'equazione Hamilton - Jacobi (7).

[1] T. Levi-Civita, U. Amaldi : *Lezioni di meccanica razionale.* Nicola Zanichelli, Bologna (1974).

[2] H. Golstein, C. Poole: *Meccanica Classica.* Zanichelli, Bologna (2005).

[3] V. I. Arnold: *Metodi matematici della meccanica classica.* Editori Riuniti/Mir, Mosca (1979).

[4] B. Dubrovin: *Appunti di Meccanica Analitica.* https://people.sissa.it/ dubrovin/meccanica.pdf, Trieste (2010).

[5] G. Vilasi: *Hamiltonian Dynamics.* World Scientific, Singapore (2001).

Luigi Martina: è professore associato di Fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca è incentrata nello studio di sistemi fisici non lineari con metodi analitici e algebrici.