Gli spazî metrici probabilistici

Carlo Sempi *Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"*
Università del Salento, Lecce

In questo articolo cercherò di presentare brevemente gli *Spazî Metrici Probabilistici* (SMP), senza entrare nei particolari, evitando, per esempio, di parlare della Topologia e dell'Analisi funzionale che essi generano. Non posso però fare a meno di citare come essi abbiano dato origine a nuovi campi di ricerca, in primo luogo, le norme triangolari, le funzioni triangolari e le copule (di queste ultime non parlerò affatto). Chi sia interessato a proseguire oltre la succinta informazione che qui ne dò, può rivolgersi alla magistrale presentazione che ne hanno fatto Schweizer e Sklar nella loro monografia [1]. Basta solo aggiungere che l'introduzione di due argomenti nella Classificazione degli argomenti matematici (MSC) di *MathSci* e *ZbMath*, 54E70 (Probabilistic metric spaces) e 46S50 (Functional analysis in probabilistic metric linear spaces) è stata motivata dallo studio degli SMP.

L'inizio della storia

Si può dire che la storia degli Spazî Metrici Probablistici (in breve SMP) abbia inizio con l'articolo [2] di Karl Menger nel volume *Albert Einstein, Philosopher–Scientist* [3] di articoli di varî autori dedicati aspetti scientifici e filosofici dell'opera di Albert Einstein. Nell'articolo citato Menger parla soprattutto della geometria della relatività e, piú in generale, della geometria nelle teorie fisiche. Al termine dell'articolo Menger brevemente considera che per alcune teorie fisiche potrebbe essere opportuno sostituire all'idea di distanza tra due punti la nozione della probabilità che tale distanza possa essere inferiore a una certa quantità. Quel breve commento ha dato origine allo studio degli *Spazî Metrici Probabilistici*[1]; qui essi saranno brevemente indicati come SMP.

In termini piú precisi, dato un insieme S, a ogni coppia (p, q) di punti di S si associa una funzione di ripartizione F_{pq} tale che sia $F_{pq}(t) = \mathbb{P}(d(p, q) < t)$, per $t > 0$. Qui $\mathbb{P}$ indica una misura di probabilità. Ricordo che una funzione di ripartizione (in breve f.r.) è una funzione F da $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$[2] in $[0, 1]$ tale che

(a) sia crescente: $F(x) \leq F(x')$ per $x < x'$;

(b) sia continua a sinistra[3];

(c) $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$.

Non tutte le f.r. sono adeguate alla funzione delineata sopra; infatti, poiché una distanza è necessaria-

[1] In realtà all'inizio essi furono chiamati Spazî Metrici Statistici; solo in in secondo momento il nome cambiò in quello attuale.

[2] $\overline{\mathbb{R}}$ è la retta reale ampliata con i due punti $-\infty$ e $+\infty$; questa scelta si rende necessaria perché nelle applicazioni appaiono grandezze che assumono i valori $-\infty$ e/o $+\infty$ con probabilità non nulla.

[3] La letteratura scientifica oscilla tra il richiedere che F sia continua a destra o a sinistra; nella teoria degli SMP vi è una certa convenienza a scegliere la continuità a sinistra.

mente positiva (≥ 0), si considerano esclusivamente f.r. F tali che $F(0) = 0$ e che si chiameranno *f.r. distanza*. Naturalmente si ha

$$
\begin{aligned}
&\text{- Se } p = q, \text{ allora } F_{pq}(t) = 1 \\
&\text{per ogni } t > 0; && (1)\\
&\text{- Se } p \neq q \text{ , allora esiste almeno} \\
&\text{un punto } t > 0 \text{ tale che } F_{pq}(t) < 1. && (2)
\end{aligned}
$$

Indicheremo lo spazio delle f.r. distanza con Δ_+.

Dalla simmetria valida per una distanza $d(p, q) = d(q, p)$ scende immediatamente l'analoga proprietà di simmetria per le f.r. distanza

$$F_{pq} = F_{qp} \,, \tag{3}$$

per ogni coppia di punti p e q dello spazio.

Un problema assai piú arduo nasce invece dalla "traduzione" della diseguaglianza triangolare per le distanze

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r) \,, \tag{4}$$

valida per ogni terna p, q e r di punti (non necessariamente distinti) dello spazio. Sin dagli inizî della teoria, Menger e Wald dettero diverse soluzioni a questo problema.

La proposta di Menger

Nell'articolo iniziale della teoria [4] Menger definí uno SMP come un insieme S dotato di una famiglia di f.r. che soddisfanno alle equazioni (1)–(3) e alla diseguaglianza

$$F_{pr}(x + y) \geq T\left(F_{pq}(x), F_{qr}(y)\right) \tag{5}$$

per ogni scelta di p, q e r in S e di x e y in $[0, +\infty]$. Qui la funzione $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ soddisfà alle condizioni

$$
\begin{aligned}
&T(a, b) = T(b, a) \,, && (6)\\
&T(a, b) \leq T(c, d) \quad \text{se } a \leq c \text{ e } b \leq d, && (7)\\
&T(a, 1) > 0 \quad \text{per } a > 0, \quad \text{e} \quad T(1, 1) = 1. && (8)
\end{aligned}
$$

Queste proprietà si interpretano facilmente: la (6) assicura che la conoscenza del terzo lato di un triangolo dipenda in maniera simmetrica da quella degli altri due lati che, per la (7), tale conoscenza aumenti all'aumentare di quella degli altri due lati. Se è noto che esiste una limitazione superiore per un lato e se si sa qualcosa sul secondo, allora si sa qualcosa anche sul terzo lato; infine, se esiste una limitazione superiore per entrambi i primi due lati, tale limitazione vale anche per il terzo lato. È importante rilevare che se esiste una funzione $d : S \times S \to \mathbb{R}_+$ tale che per ogni scelta di p e q in S e di $t \geq 0$ valga

$$F_{pq}(t) = \begin{cases} 0 \,, & t \leq d(p, q) \,, \\ 1 \,, & t > d(p, q) \,, \end{cases} \tag{9}$$

allora (S, d) è uno spazio metrico. Perciò ogni spazio metrico è un caso particolare di uno SMP.

La proposta di Wald

Subito dopo l'articolo di Menger citato nella sezione precedente, Wald [5] propose di sostituire la diseguaglianza (5) con la seguente

$$
\begin{aligned}
&F_{pr}(t) \geq \left(F_{pq} * F_{qr}\right)(t) \\
&:= \int_0^t F_{pq}(t - x) \, dF_{qr}(x) \,. && (10)
\end{aligned}
$$

La diseguaglianza di Wald si interpreta facilmente: la probabilità che la distaza di q e r sia minore di t è almeno eguale alla probabilità che la somma delle distanze tra p e q e tra q e r, *considerate come indipendenti*, sia minore di t. L'inconveniente maggiore della diseguaglianza di Wald (10) consiste nella difficoltà di reperire esempî significativi.

La soluzione di Schweizer e Sklar

Nel 1960 Schweizer e Sklar [6] supposero che la funzione di ripartizione distanza F definita su $S \times S$ soddisfacesse non solo alle (1)–(3), ma anche alla condizione

$$
\begin{aligned}
&\text{Se è } F_{pq}(x) = 1 \text{ e } F_{qr}(y) = 1 \\
&\text{allora } F_{pr}(x + y) = 1. && (11)
\end{aligned}
$$

Quest'ultima condizione è implicata tanto dalla condizione di Menger (5) quanto da quella di Wald (10). Essi dimostrarono inoltre che

- se S ha piú di un punto e se $T(a, b) \geq \max\{a, b\}$, allora la diseguaglianza (5) non può valere per ogni possibile scelta di p, q e r in S;

- se F non è del tipo (9), vale a dire se S non è uno spazio metrico, allora esiste $a \in \,]0,1[$ tale che $T(a,1) \le a$;

- se T è continua allora $T(F_{pq}(x),1) \le F_{pq}(x)$ per ogni scelta di p e q in S e per ogni $x > 0$.

Alla luce di queste considerazioni la (8) fu sostituita da quella piú forte

$$\forall\, a \in [0,1] \quad T(a,1) = a\,, \tag{12}$$

che, considerata insieme alle (6) e (7), dà, per $a, b \in [0,1]$

$$T(a,b) \le T(a,1) = a$$

e

$$T(a,b) \le T(1,b) = T(b,1) \le 1\,.$$

Perciò ogni funzione T che soddisfà a queste condizioni soddisfà anche all'altra

$$\begin{aligned}&\forall\, a,b \in [0,1]\\ &T(a,b) \le M(a,b) := \min\{a,b\}\,.\end{aligned}$$

Si osservi che in uno spazio metrico vale non solo la diseguaglianza triangolare, ma anche quella polinomiale: basta scomporre una qualsiasi poligono in triangoli, per avere, per esempio, nel caso di un quadrilatero,

$$d(p,s) \le d(p,q) + d(q,r) + d(rs)\,,$$

nella quale si sfrutta l'ovvia, ma implicita, associatività della funzione somma $+$.

Per poter estendere la diseguaglianza "triangolare" (5) al caso polinomiale, occorrerà richiedere che la funzione T sia associativa, vale a dire che per ogni scelta di a, b e c in S valga

$$T\left(T(a,b),c\right) = T\left(a,T(b,c)\right)\,. \tag{13}$$

In questo modo se p, q, r e s sono quattro punti di S e se sono dati $F_{pq}(x)$, $F_{qr}(y)$ e $F_{rs}(z)$, $F_{ps}(x+y+z)$ può essere stimata in due maniere distinte: combinando la stima di $F_{pr}(x+y)$ con $F_{rs}(z)$, oppure combinando $F_{pq}(x)$ con la stima di $F_{qs}(y+z)$. Richiedere che i due modi di procedere diano allo stesso risultato porta alla (13).

Si dice *norma triangolare*, o, piú brevemente *t–norma* una funzione $T\,[0,1]^2 \to [0,1]$ che soddisfà alle (6), (7), (12) e alla (13). Si controlla subito che $W(a,b) := \max\{0, a+b-1\}$, $\Pi(a,b) := ab$ e $M(a,b) := \min\{a,b\}$ sono t–norme (di fatto sono le tre t-norme piú importanti). È una t–norma anche la funzione

$$Z(u,v) := \begin{cases} u\,, & u \in [0,1]\ ,\ v = 1\,,\\ v\,, & u = 1\,,\ v \in [0,1]\ ,\\ 0\,, & \text{altrove,}\end{cases}$$

che però non è continua.

Data una t–norma T si dice *spazio di Menger rispetto a T* uno spazio nel quale le f.r. distanza F_{pq} soddisfacciano alle (1)–(3) e alla (5) con la data t–norma T. Si dirà *spazio di Wald* quello nel quale sono soddisfatte le (1)–(3) e la (10). Si dimostra che uno spazio di Wald è uno spazio di Menger rispetto alla t–norma Π.

Accanto alle t–norme conviene considerare anche le t–conorme. Data un t–norma T si dice *t–conorma* associata a T la funzione T^* definita in $[0,1] \times [0,1]$ da

$$T^*(x,y) := 1 - T(1-x, 1-y)\,.$$

Alcuni esempî

Gli spazî semplici. Sia (S,d) uno spazio metrico; allora lo spazio semplice (S,d,G) è definito come l'insieme S dotato della famiglia di f.r. distanza definite da

$$\begin{aligned}F_{pp} &:= \varepsilon_0\,,\\ F_{pq}(t) &:= G\left(\frac{t}{d(p,q)}\right) \qquad p \ne q\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Qui si è definita, per $a \in \mathbb{R}$,

$$\varepsilon_a(t) := \begin{cases} 0\,, & x \le a\,,\\ 1\,, & t > a\,,\end{cases} \tag{15}$$

la f.r. di una variabile aleatoria che assume quasi certamente il valore a.

Per $G = \varepsilon_1$ la (14) si riduce alla (9), sicché gli spazî metrici sono particolari spazî semplici. Uno spazio semplice è uno spazio di Menger rispetto a qualsiasi t–norma. Esistono spazî semplici che non sono spazî di Wald. ∎

Spazî α–semplici. Si scelga $\alpha > 0$ e si sostituisca la (14) con

$$F_{pq}(t) := G\left(\frac{t}{d^\alpha(p,q)}\right) \qquad p \neq q\,. \tag{16}$$

per $\alpha \in \,]0,1]$ uno spazio α–semplice è uno spazio semplice, quindi uno spazio di Menger rispetto a ogni t–norma, mentre, per $\alpha > 1$, uno spazio α–semplice è uno spazio di Menger solo rispetto a una particolare t–norma, che dipende da α. ■

Šerstnev, 1962

Nel 1962 Šerstnev introdusse una diseguaglianza che include tutte quelle precedenti come casi particolari e che costituisce la generalizzazione definitiva della diseguaglianza triangolare per gli SMP. È opportuno ricordare qui che lo spazio delle f.r. distanza può essere ordinato, parzialmente, ponendo $F \leq G$ se si ha $F(t) \leq G(t)$ per ogni $t > 0$. Poiché le funzioni ε_a definite dalla (15) sono f.r. distanza per ogni $a \geq 0$, si ha, in particolare $F \leq \varepsilon_0$ per ogni f.r. distanza F.

Definizione 1. Si dice *funzione triangolare* ogni funzione $\tau : \Delta_+ \times \Delta_+ \to \Delta_+$ tale che

$$\tau(F,G) = \tau(G,F)\,, \tag{17}$$

$$\tau(F,G) \leq \tau(H,K) \tag{18}$$

$$\text{se } F \leq H \text{ e } G \leq K,$$

$$\tau(F,\varepsilon_0) = F\,, \tag{19}$$

$$\tau\left(\tau(F,G),H\right) = \tau\left(F,\tau(G,H)\right)\,, \tag{20}$$

dove F, G, H e K sono f.r. distanza. ◇

Sulle funzioni triangolari si possono vedere i due articoli di rassegna [7] e [8].

Si può ora dare la definizione generale di SMP.

Definizione 2. Si dice *spazio metrico probabilistico*, in breve SMP, rispetto a una funzione triangolare τ un insieme S con una famiglia di funzioni di ripartizione distanza $F : S \times S \to \Delta_+$ tale che siano soddisfatte le (1)–(3) e la *diseguaglianza di Šerstnev*

$$F_{p,r} \geq \tau\left(F_{pq}, F_{q,r}\right) \tag{21}$$

per ogni scelta dei punti p, q e r in S. ◇

Nel passaggio dalla diseguaglianza triangolare (4) in uno spazio metrico (S,d) alla (21), si sono sostituiti i numeri reali che danno le distanze con funzioni di ripartizione e l'operazione di somma tra numeri reali con una funzione triangolare τ. Dato che τ non è specificata oltre le proprietà richieste dalla Definizione 1, sono possibili molte diseguaglianze triangolari distinte, non equivalenti tra loro. Per esempio, se τ è tale che, per $a,b > 0$, sia

$$\tau(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \geq \inf\{\varepsilon_c : c < a+b\}\,,$$

allora la (21) implica la (11). Se τ è la convoluzione, la (21) è la diseguaglianza di Wald (10). Un caso particolarmente importante di funzione triangolare si ha quando

$$\tau_T(F,G)(t) := \sup\left\{T\left(F(u),G(v)\right) : u+v = t\right\}\,,$$

per una t–norma abbastanza regolare T. Anche in questo caso si dirà che (S,τ_T) è uno spazio di Menger rispetto a T. È possibile estendere la definizione di τ_T sostituendo a alla somma $+$ un'altra operazione binaria suriettiva su $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0,+\infty]$ che sia crescente in ogni argomento e continua in $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$, con la possibile eccezione dei due punti $(0,+\infty)$ e $(+\infty,0)$:

$$\begin{aligned}&\tau_{T,L}(F,G)(t)\\ &:= \sup\left\{T\left(F(u),G(v)\right) : L(u,v) = t\right\}\end{aligned} \tag{22}$$

Vale allora

Teorema 1. *Se T è una t–norma continua a sinistra e L è commutativa, associativa e tale che $L(u_1,v_1) < L(u_2,v_2)$ quando $u_1 < u_2$ e $v_1 < v_2$, $\tau_{T,L}$ è una funzione triangolare.*

Si può definire una funzione triangolare anche a partire da una t–conorma T^* nel seguente modo

$$\begin{aligned}&\tau_{T^*}(F,G)(t)\\ &:= \ell^- \inf\left\{T^*(F(u),G(v)) : u+v = t\right\}\,,\end{aligned}$$

dove è stata utilizzata la notazione

$$\ell^- f(t) := \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} f(s)$$

per il limite a sinistra nel punto t.

Altri esempî.

Spazî E. Siano $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, (M,d) uno spazio metrico e S un insieme di funzioni da Ω in M. Si dice *Spazio E* la coppia $(S,\mathcal{F})$ se

(a) per ogni scelta di $p, q \in S$ e di $t \in \mathbb{R}_+$ l'insieme

$$\{\omega \in \Omega : d(p(\omega), q(\omega)) < t\}$$

è misurabile, vale a dire, appartiene a $\mathcal{A}$;

(b) per ogni scelta di $p, q \in S$,

$$\mathcal{F}(p,q)(t) = F_{pq}(t) \\ := \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : d(p(\omega), q(\omega)) < t\}\right) .$$

Si dimostra immediatamente che $\mathcal{F}$ soddisfà alla (1) e alla (3); se è soddisfatta anche la (2), lo spazio si dice *canonico*. Si dimostra che un spazio E $(S, \mathcal{F})$ canonico è uno spazio di Menger rispetto alla t–norma W. ■

Spazî generati da una trasformazione. Sia (S, d) uno spazio metrico e φ una funzione di S in sé, si indichi con $\varphi^{(n)}$ l'iterata n–esima di φ, con $\varphi^{(0)}p = p$, e si definisca

$$F_{pq}^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{d(\varphi^{(n)}p, \varphi^{(n)}q)} .$$

Allora lo spazio $(S, \mathcal{F}^{(n)})$, dove $\mathcal{F}^{(n)}(p,q) := F_{pq}^{(n)}$ è uno spazio E rispetto a τ_W. È di particolare interesse il caso nel quale φ conservi la probabilità $\mathbb{P}$, definita sulla famiglia $\mathcal{B}$ dei boreliani di (S, d); si dice che $\varphi : S \to S$ conserva la probabilità $\mathbb{P}$ se

$$\mathbb{P}(\varphi^{-1}B) = \mathbb{P}(B) .$$

In condizioni tecniche, ma non restrittive, che qui non riporto, risulta che la successione $F_{pq}^{(n)}$ converge a una funzione di ripartizione distanza ben definita, che a sua volta genera uno SMP rispetto a τ_W (si veda il Teorema 11.2.6 in [1]).

Si hanno risultati piú forti se φ è *(fortemente) mescolante*:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\varphi^{-n}A \cap B\right) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) .$$

In questo caso se A è tale che $\mathbb{P}(A) > 0$, vale il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam} \varphi^n A = \operatorname{diam} S , \tag{23}$$

ove il diametro di un insieme $A \subset S$ è definito da

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(p,q) : p, q \in A\} .$$

Il significato fisico dell'eq. (23) è assai rilevante; per metterlo in luce occorre richiamare due risultati importanti della teoria ergodica: i teoremi di Liouville e di ricorrenza di Poincaré.

Nella meccanica classica, lo stato di un sistema con n gradi di libertà è descritto dalle n coordinate generalizzate $q = (q_1, \dots, q_n)$ e dai loro momenti coniugati $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Ogni stato di tale sistema è cosí rappresentato da un punto di coordinate (q, p) in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2n}$ detto *spazio delle fasi*. Il moto di tale punto rappresentativo, e, quindi, del sistema considerato, è retto dalle equazioni di Hamilton

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Qui H è la (funzione) Hamiltoniana del sistema, che è indipendente dal tempo t e, di solito, si esprime come la somma dell'energia cinetica $K(p)$ e dell'energia potenziale $V(q)$. Detto $P_0 = (q_0, p_0)$ lo stato iniziale del sistema, la soluzione delle equazioni di Hamilton determina lo stato del sistema per ogni istante $t > 0$

$$(q_t, p_t) = \varphi_t \ (q_0, p_0) .$$

Si ottiene pertanto un semigruppo $\{\varphi_t : t \geq 0\}$ di trasformazioni,

$$\varphi_{t+t'} = \varphi_t\, \varphi_{t'} ,$$

sullo spazio delle fasi. Tale semigruppo di trasformazioni si dice *flusso hamiltoniano* e gode della proprietà fondamentale espressa dal seguente teorema.

Teorema 2 (di Liouville)**.** *Il flusso hamiltoniano $\{\varphi_t\}$ conserva la misura di Lebesgue λ_{2n} nello spazio delle fasi: se A è un sottoinsieme misurabile dello spazio delle fasi si ha, per ogni istante $t \geq 0$,*

$$\lambda_{2n}(A) = \lambda_{2n}\left(\varphi_t\, A\right) .$$

Per il teorema di Liouville ogni trasformazione φ_t lascia invariata la misura di Lebesgue. In generale se $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura e $\varphi : \Omega \to \Omega$ è una trasformazione di Ω in sé, si dice che φ *conserva la misura* se, per ogni insieme misurabile A,

$$\mu\left(\varphi^{-1}A\right) = \mu(A) .$$

Siano φ una trasformazione sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ che conserva la misura, e A un insieme di $\mathcal{A}$; un punto ω di A si dice *ricorrente*, rispetto a T e A, se $\varphi^i\, \omega$ appartiene ad A per almeno un numero naturale i; si dice, invece, che ω è *fortemente ricorrente* se $\varphi^n\,\omega$ appartiene ad A per infiniti naturali, cioè se $\omega \in \limsup_{n\to+\infty} \varphi^{-n}\,A$. Si dice infine che A, con $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$, è *coerentemente ricorrente* se esiste $a > 0$ tale che sia

$$\mathbb{P}\left(A \cap \varphi^n A\right) \geq \left(\mathbb{P}(A) + a\right)\, \mathbb{P}\left(\varphi^n A\right) \qquad (24)$$

per un'infinità numerabile di numeri naturali n.

Vale il teorema di Poincaré che apparve nel suo trattato *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [9] del 1899 e fu il primo teorema a usare l'additività numerabile delle probabilità, benché tale concetto non fosse all'epoca ancora stato definito esplicitamente.

Teorema 3 (di ricorrenza di Poincaré)**.** *Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità, $\varphi : \Omega \to \Omega$ una trasformazione che conserva la misura e A un insieme di $\mathcal{A}$. Allora, quasi tutti i punti di A sono ricorrenti.*

Il teorema di Poincaré sembra contraddire il secondo principio della termodinamica. Tuttavia si tenga presente che per rappresentare lo stato di un sistema fisico con un punto nello spazio delle fasi occorre che tale stato sia noto con esattezza. Poiché, di fatto, ciò non accade mai, un modello piú realistico, che riflette sia le imprecisioni delle misurazioni sia l'impossibilità di conoscere *esattamente* la coppia (q,p) per ogni elemento del sistema, è che la configurazione iniziale del sistema sia descritta non da un punto nello spazio delle fasi, ma da un insieme di punti indistinguibili dal punto di vista sperimentale, ma di diametro strettamente positivo, benché possibilmente piccolo, e di probabilità non nulla, benché anche'essa piccola. Inoltre una trasformazione mescolante non può essere coerentemente ricorrente [13].

Teorema 4. *Sia φ una trasformazione mescolante sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tale che, per ogni $B \in \mathcal{A}$, sia $\varphi B \in \mathcal{A}$ e $\mathbb{P}(\varphi B) \geq \mathbb{P}(B)$; allora nessun insieme $A \in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$ è coerentemente ricorrente.*

Se l'evoluzione del sistema è retta da una trasformazione mescolante dello spazio delle fasi l'equazione (23) e il Teorema 4 assicurano che l'insieme iniziale si diffonda in diametro e che non vi sia ricorrenza. Nelle parole di Schweizer e Sklar, "la (23) e il Teorema 4 costituiscono una parziale, sebbene tardiva, rivendicazione dell'intuizione fisica di Ludwig Boltzmann". ■

Gli spazî normati probabilistici

Dopo i tentativi di diversi autori, Alsina, Schweizer e Sklar [10] dettero la definizione "giusta" di *spazio Normato Probabilistico* (=spazio NP). Per una discussione piú approfondita Si veda l'articolo di rassegna [11] o la monografia [12]..

Definizione 3. Uno Spazio NP è una quadrupla (V, ν, τ, τ^*), ove V è uno spazio vettoriale reale, τ e τ^* sono funzioni triangolari continue e l'applicazione $\nu : V \to \Delta_+$ soddisfà, per ogni scelta di p e q in V, alle condizioni

(N1) $\nu_p = \varepsilon_0$ se, e solo se, $p = \theta$ (θ è il vettore nullo di V);

(N2) $\forall\, p \in V \quad \nu_{-p} = \nu_p$;

(N3) $\nu_{p+q} \geq \tau\left(\nu_p, \nu_q\right)$;

(N4) $\forall\, \alpha \in [0,1] \quad \nu_p \leq \tau^*\left(\nu_{\alpha p}, \nu_{(1-\alpha)\,p}\right)$.

La funzione ν si dice *norma probabilistica*. Se $\tau = \tau_T$ e $\tau^* = \tau_{T^*}$ per una t–norma T e per la sua t–conorma T^*, lo spazio si dice spazio NP di Menger.; se, poi, $T = M$ e, quindi, $\tau_M = \tau_{M^*}$ si parla di spazio NP di Šerstnev. ◇

Esempio 1. (Spazî NP semplici). Dato uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ e una f.r. distanza F si definisce $\nu : V \to \Delta_+$ mediante $\nu_\theta := \varepsilon_0$ e, per $p \neq \theta$

$$\nu_p(t) := F\left(\frac{t}{\|p\|}\right) \qquad (t > 0)\,.$$

Si dimostra che lo spazio NP generato da $(V, \|\cdot\|)$ e da F è uno spazio NP di Menger rispetto a M e uno spazio NP di Šerstnev.

Come nel caso degli spazî MP, anche nel per quelli NP si possono definire gli spazî α–semplici, ponendo se $p \neq \varepsilon_0$

$$\nu_p(t) := F\left(\frac{t}{\|p\|^\alpha}\right)\,.$$

■

Esempio 2. (Gli spazî EN). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e S uno spazio vettoriale di variabili aleatorie a valori in V; per ogni $p \in S$ e per ogni $t > 0$ si definisca l'applicazione $\nu : S \to \Delta_+$ mediante

$$\nu_p(t) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|p(\omega)\| < t\}) . \tag{25}$$

La coppia (S, ν) si dice spazio EN. Uno spazio EN risulta essere uno spazio NP, salvo, forse, la proprietà (N1), rispetto a τ_W e τ_M. Si dice *canonico* se vale la (N1); in tal caso è di Šerstnev.

In uno spazio EN si può definire un relazione d'equivalenza $\sim$ mediante

$$p \sim q \quad \Longleftrightarrow \quad \nu_q = \nu_p .$$

Sia $\widetilde{S} := S/\sim$ lo spazio quoziente e si ponga $\widetilde{\nu}_p := \nu_p$ per ogni p nella classe d'equivalenza $\widetilde{p}$. Si può allora applicare questo risultato allo spazio vettoriale L^0 delle classi d'equivalenza delle variabili aleatorie $f : \Omega \to \mathbb{R}$; in questo caso l'applicazione quoziente è

$$\nu_f(t) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| < t\}) .$$

Se S è un qualsiasi sottospazio vettoriale di L^0, allora $(S, \nu_{|S}, \tau_W)$ è uno spazio di Šerstnev: casi particolarmente importanti si hanno quando si scelga per S uno spazio L^p con $p \in [1, +\infty]$: per $f \in L^p$,

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}_+} t^p \, d\nu_f(t) \quad p \in [1, +\infty[$$
$$\|f\|_\infty = \sup\{t > 0 : \nu_f(t) < 1\} \quad p = +\infty .$$

Si vede cosí che le norme degli spazî L^p derivano tutte dalla stessa norma probabilistica (25), un fatto potenzialmente importante per le applicazioni all'Analisi funzionale.

Naturalmente si ha che una successione (f_n) di funzioni di L^p con $p \in [1, +\infty[$ converge a θ se, e solo se,

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^p \, d\nu_{f_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 ,$$

mentre in L^∞ (f_n) converge a θ se, e solo se, la successione $(\nu_{f_n}(t))$ è definitivamente eguale a 1. ■

Come ultima osservazione, negli spazî NP vi è una rielaborazione del concetto di insieme limitato. Mentre in uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$, un insieme A è limitato se esiste una costante k tale che risulti $\|p\| \le k$ per ogni $p \in A$, in uno spazio NP si introduce il *raggio probabilistico* di A definito da $R_A(+\infty) = 1$ e, per $t \in [0, +\infty[$, da

$$R_A(t) := \ell^- \inf\{\nu_p(t) : p \in A\} .$$

Allora l'insieme A si dice

(a) *certamente limitato* se esiste $t_0 \in]0, +\infty[$ con $R_A(t_0) = 1$;

(b) *forse limitato* se si ha $R_A(t) < 1$ per ogni $t \in]0, +\infty[$, ma

$$\lim_{n \to +\infty} R_A(t) = 1 ;$$

(c) *forse illimitato* se esiste $t_0 \in]0, +\infty[$ con $R_A(t_0) > 0$ e

$$\lim_{n \to +\infty} R_A(t) \in]0, 1[;$$

(d) *certamente illimitato* se $\lim_{n \to +\infty} R_A(t) = 0$.

Nei casi (a) e (b) l'insieme A si dice anche limitato in legge.

Conclusioni

Ho presentato brevemente gli Spazî Metrici (e Normati) Probabilistici, evitando sia le dimostrazioni sia la giustificazione di numerose affermazioni; ho anche omesso di accennare a qualcuno degli sviluppi piú tecnici dal punto di vista matematico. Mi premeva far conoscere la generalizzazione del concetto di spazio metrico, intuita e propugnata da Karl Menger e portata a compimento da Schweizer, Sklar e Šerstnev. Solo approfondendone lo studio, si possono vedere le potenzialità per le applicazioni in Matematica e in Fisica (ma ne è stata fatta almeno una anche in Psicologia). Spero solo di aver destato la curiosità del lettore.

[1] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North Holland, New York, 1983; 2nd ed., Dover, Mineola NY, 2005.

[2] K. Menger, Theory of relativity and geometry in *Albert Einstein, Philosopher–Scientist*, the Library of Living Philosophers, vol. VII, P.A. Schilpp, ed., Evanston, IL, 1949, pp. 559–474; anche in *Karl Menger. Selecta Mathematica. Volume I*, B. Schweizer, A. Sklar, K. Sigmund, E. Hlawka, L.Reich, L.Schmetterer, eds., Springer, Wien–NewYork, 2002, pp. 551–566.

[3] *Albert Einstein, Philosopher–Scientist*, the Library of Living Philosophers, vol. VII, P.A. Schilpp, ed., Evanston, IL, 1949; traduzione italiana, *Albert Einstein, scienziato e filosofo*, Boringhieri, Torino, 1958.

[4] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **28**, 535–537 (1942); anche in *Karl Menger. Selecta Mathematica. Volume I*, B. Schweizer, A. Sklar, K. Sigmund, E. Hlawka, L.Reich, L.Schmetterer, eds., Springer, Wien–NewYork, 2002, pp. 433–435.

[5] A. Wald, On a statistical generalization of metric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **29**, 196–197 (1943).

[6] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math* **10**, 313–334 (1960).

[7] S. Saminger–Platz, C. Sempi, A primer on triangle functions I, *Aequationes Math.* **76**, 201–240 (2008). DOI 10.1007/s00010-008-2936-8

[8] S. Saminger–Platz, C. Sempi, A primer on triangle functions II, *Aequationes Math.* **80**, 239–268 (2010). DOI 10.1007/s100010-010-0038-x

[9] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 3, Gauthier–Villars, 1899.

[10] C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar, On the definition of a probabilistic normed space, *Aequationes Math.* **46** 91–98 (1993).

[11] C. Sempi, A short and partial history of probabilistic normed spaces, *Mediterr. J. Math.*, **3**, 283–300 (2006). doi: 10.1007/s00009-006-0078-6.

[12] B. Lafuerza Guillén, P. Harikrishnan, *Probabilistic normed spaces*, Imperial College Press, London, 2014.

[13] R. Rice, On mixing transformations, *Aequationes Math.* **17** 104–108 (1978).