Breve storia dei numeri primi

Alessandro Zaccagnini *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Parma, Parma.*

Facciamo una breve panoramica dei più importanti risultati sulla distribuzione dei numeri primi. Andremo sostanzialmente in ordine cronologico presentando i risultati dei matematici più importanti del XIX secolo. Di seguito parleremo della Congettura di Riemann ed infine faremo il punto della situazione sui quattro problemi proposti da Landau nel 1912. In diversi casi, daremo dimostrazioni moderne dei risultati che presenteremo, pur rispettando essenzialmente il lavoro dei grandi matematici di cui parleremo.

La storia fino al XIX secolo

Euclide

Euclide per primo ha dimostrato che l'insieme dei numeri primi è infinito. Qui diamo una dimostrazione leggermente diversa da quella che la tradizione gli attribuisce.

Teorema 1 (Euclide). *Esistono infiniti numeri primi.*

Dim. Consideriamo un numero intero positivo N ed osserviamo che

$$p \mid N! + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p > N$$

Dunque l'insieme dei numeri primi è illimitato superiormente.

Per esempio il più piccolo numero primo p che divide $5! + 1 = 121 = 11^2$ è necessariamente > 5. Questa dimostrazione ha il pregio di fornire automaticamente una limitazione dal basso per *qualsiasi* divisore non banale di $N! + 1$, non necessariamente primo. Vedi la nota 1.

Eulero

Molti secoli dopo, Eulero ha dato una dimostrazione alternativa dello stesso fatto, molto importante per almeno due motivi: in primo luogo, perché per la prima volta intervengono concetti non strettamente aritmetici nelle considerazioni sui numeri primi, e in secondo luogo perché questa dimostrazione dà, come sottoprodotto, un'indicazione della *densità* dei numeri primi nell'insieme dei numeri naturali.

Teorema 2 (Eulero). *La serie*

$$\sum_p \frac{1}{p} \qquad \textit{è divergente}$$

dove la notazione indica che la somma è fatta solo sui numeri primi.

Il Teorema di Eulero non solo implica che i numeri primi sono infiniti, ma anche che sono piuttosto densi, più dei quadrati perfetti solo per fare un esempio, altrimenti la serie dell'enunciato non divergerebbe. Questo risultato, dunque, è estremamente più forte del Teorema di Euclide. La dimostrazione è relativamente semplice e fornisce una buona illustrazione di come si possono far interagire al meglio concetti di natura aritmetica e altri di natura analitica; in altre parole, "discreto" e "continuo" possono tranquillamente e proficuamente coesistere.

Lemma 3. *Per $N \to +\infty$ si ha*

$$\prod_{p \le N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ge \sum_{n \le N} \frac{1}{n}$$
$$= \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x} + \mathcal{O}(1) = \log(N) + \mathcal{O}(1)$$

Dim. L'uguaglianza a destra nell'enunciato deriva dal fatto che stiamo essenzialmente confrontando l'integrale di una funzione decrescente con una opportuna *somma di Riemann*. Sviluppando ciascun fattore a sinistra in serie geometrica di ragione $1/p$, otteniamo

$$\prod_{p \le N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$
$$= \prod_{p \le N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right)$$
$$= \sum_{n \in \mathcal{A}(N)} \frac{1}{n}$$

dove

$$\mathcal{A}(N) = \{n \in \mathbb{N}^* : p \mid n \Rightarrow p \le N\}$$
$$\supset \quad \{1, 2, \dots, N\}$$

Per esempio, per $N \ge 11$ l'addendo $1/198$ compare nella forma $(1/2) \cdot (1/3^2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1/11)$ poiché $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$. In generale, possiamo moltiplicare fra loro un numero finito di serie assolutamente convergenti e riordinarne i termini. In altre parole, $\mathcal{A}(N)$ è il *semigruppo* moltiplicativo di $\mathbb{N}^*$ generato dai numeri primi che non superano N.

Prendendo il logaritmo ed usando la formula di Taylor al primo ordine otteniamo

$$\log \prod_{p \le N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$
$$= \sum_{p \le N} \frac{1}{p} + \mathcal{O}(1) \ge \log\log(N) + \mathcal{O}(1)$$

che è una versione quantitativamente forte del Teorema di Eulero.

Definizione 4 (Funzione zeta)**.** *Per s reale, $s > 1$, poniamo*

$$\zeta(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (1)$$

L'uguaglianza a destra (*identità di Eulero*) si dimostra come nel Lemma precedente, prima moltiplicando fra loro le serie geometriche assolutamente convergenti di ragione p^{-s} relative ai numeri primi p fino ad un certo valore N, e poi prendendo il limite per N che tende all'infinito. È la versione analitica del *Teorema Fondamentale dell'Aritmetica*. Da questa deduciamo ancora una volta il Teorema di Euclide: il *criterio integrale* per le serie ci dà

$$\zeta(s) \ge \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1}$$
$$\Longrightarrow \quad \lim_{s \to 1+} \zeta(s) = +\infty$$

e quindi esistono infiniti numeri primi. Infatti, se ne esistessero solo un numero finito, l'identità di Eulero implicherebbe un valore finito per quest'ultimo limite, perché il prodotto avrebbe solo un numero finito di fattori. Vedi la nota 2.

Gauss

Gauss capí che la chiave per capire la distribuzione dei numeri primi risiede nello studiare la loro densità, cioè quanti numeri primi, approssimativamente, cadono nell'intervallo $[1, N]$ quando N tende all'infinito.

Definizione 5.

$$\pi(N) = |\{p \le N\}| = \sum_{p \le N} 1$$

Gauss aveva l'abitudine di calcolare i numeri primi in intervalli di 1000 interi consecutivi, come passatempo. Basandosi sui dati cosí raccolti, formulò la seguente

Congettura 6 (Gauss)**.** *Per $N \to +\infty$ si ha*

$$\pi(N) \approx \mathrm{li}(N) = \int_0^N \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)}$$

dove il simbolo $\approx$ indica un'uguaglianza approssimata.

Integrando $n + 1$ volte per parti e stimando l'integrale che resta, si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \mathrm{li}(N) &= \frac{N}{\log N} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(\log N)^k} \\ &+ \mathcal{O}_n\left(\frac{N}{(\log N)^{n+2}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ *fissato*. Se prendiamo $n = 0$ nella (2) otteniamo in particolare che $\mathrm{li}(N) \sim N/\log(N)$, dove $f \sim g$ significa che $f/g \to 1$ quando $N \to +\infty$.

Congettura 7 (Forma debole)**.**

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\pi(N)}{\mathrm{li}(N)} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi(N)\log(N)}{N} = 1 \tag{3}$$

Al primo ordine, dunque, non c'è molta differenza fra $\mathrm{li}(N)$ ed $N/\log(N)$, ma dal punto di vista numerico, come Gauss aveva intuito, $\mathrm{li}(N)$ è un'approssimazione di $\pi(N)$ molto più accurata: si veda la Figura 1. Prendendo $n = 1$ nella (2) e trascurando errori di ordine più piccolo si ritrova, essenzialmente, la formula proposta da Legendre sulla base di dati che oggi possiamo giudicare del tutto insufficienti, e cioè $\pi(N) \sim N/(\log(N) - 1)$. Questa è leggermente più accurata, dal punto di vista numerico, della relazione $\pi(N) \sim N/\log(N)$, ma evidentemente equivale alle altre due contenute nella Congettura 7.

Sia ora p_n l'n-esimo numero primo. Le due funzioni $\pi(N)$ e p_n sono sostanzialmente l'una l'inversa dell'altra, nel senso preciso che $\pi(p_n) = n$. La forma debole della Congettura di Gauss equivale alla formula asintotica $p_n \sim n\log(n)$. Questo è pienamente compatibile con il Teorema di Eulero visto sopra. Vedi la nota 3.

Dirichlet

Facciamo una brevissima digressione per ricordare un importante risultato di Dirichlet, che dimostrò l'esistenza di infiniti numeri primi in tutte le *progressioni aritmetiche* che ne possono contenere almeno due. Dirichlet riutilizzò le tecniche di Eulero e per primo introdusse l'analisi complessa nella Teoria dei Numeri, prima ancora di Riemann, anche se in una forma che oggi appare rudimentale.

N	$\pi(N)$	$\mathrm{li}(N) - \pi(N)$
10	4	2
10^2	25	5
10^3	168	10
10^4	1 229	17
10^5	9 592	38
10^6	78 498	130
10^7	664 579	339
10^8	5 761 455	754
10^9	50 847 534	1 701
10^{10}	455 052 511	3 104
10^{11}	4 118 054 813	11 588
10^{12}	37 607 912 018	38 263
10^{13}	346 065 536 839	108 971
10^{14}	3 204 941 750 802	314 890
10^{15}	29 844 570 422 669	1 052 619
10^{16}	279 238 341 033 925	3 214 632
10^{17}	2 623 557 157 654 233	7 956 589
10^{18}	24 739 954 287 740 860	21 949 555
10^{19}	234 057 667 276 344 607	99 877 775
10^{20}	2 220 819 602 560 918 840	222 744 644
10^{21}	21 127 269 486 018 731 928	597 394 254
10^{22}	201 467 286 689 315 906 290	1 932 355 208
10^{23}	1 925 320 391 606 803 968 923	7 250 186 216
10^{24}	18 435 599 767 349 200 867 866	17 146 907 278
10^{25}	176 846 309 399 143 769 411 680	55 160 980 939

Figura 1: *Confronto tra la quantità di numeri primi e la formula di Gauss. Si noti che $\pi(N) < \mathrm{li}(N)$ per tutti questi valori. Si noti inoltre che la colonna a destra è ampia circa la metà di quella centrale.*

Teorema 8 (Dirichlet, 1837)**.** *Per ogni $q \in \mathbb{N}^*$ ed ogni $a \in \mathbb{Z}$ tali che $(q, a) = 1$ esistono infiniti numeri primi $p \equiv a \bmod q$.*

Non c'è lo spazio per approfondire i dettagli, e quindi citiamo brevemente due importanti questioni lasciate aperte dal lavoro di Dirichlet. La prima riguarda il fatto che Dirichlet teneva q *fissato*, dimostrando una forma appropriata del Teorema di Eulero 2 dove la somma è fatta solo sui numeri primi $p \equiv a \bmod q$, mentre è ora riconosciuta l'importanza di avere risultati *uniformi*, cioè che valgono per un gran numero di progressioni simultaneamente. Inoltre, per le applicazioni (citiamo, fra le tante, solo quella al problema di Goldbach) è necessario avere, allo stesso tempo, anche relazioni *quantitative* dello stesso tipo della Congettura 6 di Gauss, se possibile con un termine d'errore esplicito. Vedi la nota 4.

Chebyshev

Chebyshev fu il primo a fornire un'evidenza quantitativa alla Congettura di Gauss.

Definizione 9. *Poniamo*

$$\lambda = \liminf_{N\to+\infty} \frac{\pi(N)\log(N)}{N}$$

e

$$\Lambda = \limsup_{N\to+\infty} \frac{\pi(N)\log(N)}{N}$$

Teorema 10 (Chebyshev). *Si ha* $0.92\ldots \le \lambda \le \Lambda \le 1.105\ldots$.

Questo significa che il vero ordine di grandezza quando $N \to +\infty$ della funzione $\pi(N)$ è effettivamente $N/\log(N)$.

Teorema 11 (Chebyshev). *Se* $\lambda = \Lambda$ *allora* $\lambda = \Lambda = 1$.

In altre parole, se il limite nella Congettura 7 esiste, allora vale 1. Chebyshev introdusse due funzioni per "contare" i numeri primi, oltre alla funzione π definita qui sopra: una di queste, chiamata ψ, ha un'interpretazione aritmetica del tutto naturale.

Definizione 12 (Funzione ψ di Chebyshev). $\psi(N) = \log \operatorname{mcm}\{1, 2, 3, \ldots, N\}$

Non daremo l'intera dimostrazione del Teorema di Chebyshev 10, ma solo le idee necessarie per ottenere la minorazione con il valore $\log(2)$ al posto di $0.92\ldots$. Cominciamo da una disuguaglianza fondamentale.

Lemma 13.

$$\psi(N) = \sum_{p\le N} \left\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \le \pi(N)\log(N)$$

Inoltre $\psi(N) \ge (1 + o(1))\pi(N)\log(N) + \mathcal{O}\big(N(\log N)^{-1}\big)$

Dim. Per dimostrare l'uguaglianza a sinistra è sufficiente osservare che, dato un numero primo $p \le N$, la sua massima potenza che non supera N è quella con esponente $a_p = \lfloor \log(N)/\log(p) \rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} \colon p^m \le N\}$, per poi ricordare la caratterizzazione elementare del minimo comune multiplo. Inoltre, per ogni $y \in (1, N]$ abbiamo

$$\psi(N) \ge \sum_{y<p\le N} \log p \ge \big(\pi(N) - \pi(y)\big)\log y$$

La disuguaglianza cercata segue scegliendo $y = N(\log N)^{-2}$, poiché $\pi(y) \le y$.

Dimostrazione (Teorema di Chebyshev). Per $m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^1 x^m(1-x)^m \,\mathrm{d}x \\ &= B(m+1, m+1) = \frac{m!^2}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

Per i nostri scopi presenti non è strettamente necessario osservare che I_m è un valore della funzione Beta di Eulero. Ci basta la disuguaglianza

$$0 < I_m \le \big(\max_{x\in[0,1]} x(1-x)\big)^m = \frac{1}{4^m}$$

La funzione integranda è un polinomio a coefficienti interi di grado $2m$: dunque

$$\int x^m(1-x)^m \,\mathrm{d}x = (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots \in \mathbb{Q}[x] + \mathbb{R}$$

e inoltre, a parte il valore della costante di integrazione, i coefficienti di questa primitiva sono numeri razionali con denominatore $\le 2m+1$. Valutiamo una primitiva in 0 e in 1, e poi moltiplichiamo il risultato per il minimo comune multiplo degli interi fra 1 e $2m+1$: il risultato è un intero *positivo*; quindi

$$\begin{aligned} &I_m \exp\psi(2m+1) \in \mathbb{N}^* \\ &\Longrightarrow \psi(2m+1) \ge \log\big(I_m^{-1}\big) \ge 2m\log(2) \end{aligned}$$

Usando il Lemma 13 otteniamo $\pi(2m+1) \ge 2m\log(2)/\log(2m+1)$. Osservando infine che $\pi(2m) \ge \pi(2m+1) - 1$ per $m \ge 1$, con qualche breve calcolo si ottiene la tesi.

Vedi la nota 5.

Mertens

Mertens riuscì a semplificare la dimostrazione dei Teoremi di Chebyshev e a rendere più precisa la stima del risultato del Teorema di Eulero 2. L'idea da cui si può partire è il calcolo di $\log(N!)$ effettuato in due modi diversi. Da una parte la *formula di Stirling*, in una versione non particolarmente precisa, ci dà

$$\begin{aligned}\log(N!) &= \sum_{n\le N}\log(n)\\ &= \int_1^N \log(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\log(N))\\ &= N\log(N)+\mathcal{O}(N)\end{aligned}$$

dove anche questa volta confrontiamo l'integrale di una funzione monotòna con una sua somma di Riemann.

Il secondo passo è quello di scomporre in fattori primi $N!$, tenendo conto del fatto che solo i numeri primi $p \le N$ possono comparire nella fattorizzazione:

$$\begin{aligned}&\log(N!)\\ =\ &\sum_{p\le N}\Big(\Big\lfloor\frac{N}{p}\Big\rfloor+\Big\lfloor\frac{N}{p^2}\Big\rfloor+\Big\lfloor\frac{N}{p^3}\Big\rfloor+\dots\Big)\log(p)\\ =\ &N\sum_{p\le N}\frac{\log(p)}{p}+\mathcal{O}(N). \qquad (4)\end{aligned}$$

L'uguaglianza a destra si dimostra trascurando le parti intere e il contributo delle potenze perfette. Per ottenere l'uguaglianza a sinistra è sufficiente osservare che, scelto un numero primo $p \le N$, vi sono esattamente $\lfloor N/p\rfloor$ suoi multipli che non superano N, e questi contribuiscono un'unità all'esponente di p nella fattorizzazione di $N!$. Inoltre, vi sono $\lfloor N/p^2\rfloor$ multipli di p^2 che non superano N, che contribuiscono un'ulteriore unità, e cosí via. La somma qui sopra al centro è solo apparentemente infinita poiché $\lfloor N/p^k\rfloor = 0$ per k sufficientemente grande. Per esempio, la massima potenza di 2 che divide $100!$ è quella con esponente $50+25+12+6+3+1=97$, poiché nell'intervallo $[1,100]$ ci sono 50 numeri pari, 25 multipli di 4, 12 multipli di 8, 6 multipli di 16, 3 multipli di 32 ed infine un solo multiplo di 64. Ciascuno di questi contribuisce all'esponente in questione come affermato. Abbiamo dunque dimostrato il seguente risultato:

Teorema 14 (Mertens). *Per $N \to +\infty$ si ha*

$$\sum_{p\le N}\frac{\log(p)}{p} = \log(N)+\mathcal{O}(1)$$

Una conseguenza è la formula asintotica, che precisa il Teorema di Eulero 2,

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p} = \log\log(N)+\mathcal{O}(1) \qquad (5)$$

che si deduce dalla precedente mediante uno strumento della stessa sofisticazione della formula di integrazione per parti, detta *Formula di sommazione parziale*; si veda l'Appendice. Da questa formula asintotica segue una dimostrazione molto semplice del Teorema di Chebyshev 11: infatti, se $\pi(N) \sim LN/\log(N)$ per qualche $L \in \mathbb{R}^+$, allora la somma a primo membro della (5) vale $(L+o(1))\log\log(N)$. In altre parole, se esiste il limite nella Congettura 7, Eq. (3), allora vale 1. Resta sempre il problema di dimostrare che questo limite esiste. La dimostrazione originale di Chebyshev, precedente rispetto alle scoperte di Mertens, utilizzava le proprietà analitiche della funzione ζ di Riemann, di cui parleremo sotto.

Naturalmente i Teoremi di Chebyshev 11 e di Mertens 14 seguono immediatamente dalla Congettura di Gauss 6, con la formula di sommazione parziale, ma possono essere ricavati direttamente ed elementarmente, come abbiamo, seppur solo in parte, visto. Vedi la nota 6.

Riemann

Riemann scrisse un solo breve articolo [1] sulla Teoria dei Numeri, nel quale indicò la strada che portò, una quarantina d'anni più tardi, alla dimostrazione della Congettura di Gauss, che oggi si chiama *Teorema dei Numeri Primi*. La chiave di tutto il ragionamento di Riemann è quella di considerare la funzione ζ con argomento complesso. Possiamo riassumere i punti cruciali del suo lavoro come segue, in un certo senso, scattando 6 istantanee del procedimento suggerito da Riemann, e portato a termine dai suoi successori, per indicare la plausibilità della sua argomentazione. È opportuno ricordare che all'epoca della pubblicazione del lavoro citato (1859) l'analisi complessa come la conosciamo oggi quasi *non esisteva* e quindi, ciò che a noi appare ragionevole, oltre 150 anni dopo, era allora straordinariamente innovativo.

1. Dimostrazione dell'Identità di Eulero (1) per tutti i numeri complessi $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1$.

2. Equazione funzionale e prolungamento analitico della funzione ζ a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3. Espressione di ζ come *prodotto di Weierstrass* sugli zeri.

4. Stima del numero degli zeri di ζ nella *striscia critica* $0 \leq \sigma \leq 1$.

5. Espressione di $\psi(N)$ mediante un opportuno integrale complesso su un cammino illimitato contenuto nel semipiano $\sigma > 1$.

6. Deformazione del cammino di integrazione: connessione fra ψ e gli zeri della funzione ζ (la *formula esplicita*).

Del primo punto ci siamo, sostanzialmente, già occupati sopra, poiché $|p^{-s}| = p^{-\sigma}$, e $\sigma > 1$ per ipotesi, e quindi si può ripetere la stessa dimostrazione del Lemma 3. Per la precisione, Riemann lavorava con la funzione π, e non con la funzione ψ che risulta tecnicamente più comoda.

Teorema 15 (Equazione funzionale). *Posto*

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) \\ &= \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)(s-1)\zeta(s) \end{aligned}$$

si ha che ξ è olomorfa su $\mathbb{C}$ e soddisfa la relazione $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Poiché le proprietà di ζ sono note nel semipiano $\sigma > 1$, l'equazione funzionale permette di dedurle nel semipiano $\sigma < 0$. In particolare, $\zeta(s) \neq 0$ in $\sigma > 1$ e quindi la funzione ζ non si annulla nemmeno in $\sigma < 0$, a parte i cosiddetti zeri "banali" ai poli di Γ, situati in -2, -4, -6, ... Si noti che ξ è reale sull'asse reale e sulla retta di equazione $\sigma = \frac{1}{2}$. Questo è cruciale per dimostrare numericamente che gli zeri complessi della funzione zeta (tutti quelli noti fino ad oggi) si trovano sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$: si veda la discussione sulla Congettura di Riemann, più avanti.

La regione del piano complesso con $0 \leq \sigma \leq 1$ si dice "striscia critica": sono gli zeri in questa zona che determinano la bontà delle approssimazioni di $\pi(N)$.

Lasciamo da parte il prodotto di Weierstrass per la funzione ζ (più precisamente, per la funzione ξ) che è un argomento strettamente legato all'analisi complessa e ci costringerebbe ad una digressione. Ci limitiamo ad osservare che è un ingrediente fondamentale nella dimostrazione, fra le altre cose, della Formula di Riemann-von Mangoldt 16 qui sotto e della regione libera da zeri. Per l'equazione funzionale e il principio di riflessione, gli zeri complessi $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ della funzione zeta sono disposti simmetricamente rispetto all'asse reale e rispetto al punto $s = \frac{1}{2}$. Per la dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi 18 è indispensabile avere informazioni più precise sulla loro distribuzione, da almeno due punti di vista. Il primo è la loro *densità*.

Teorema 16 (Formula di Riemann–von Mangoldt). *Per $T \to +\infty$ si ha*

$$\begin{aligned} N(T) &= |\{\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma \colon \zeta(\rho) = 0, \\ &\qquad \beta \in (0,1), \gamma \in [0,T]\}| \\ &= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T) \end{aligned} \qquad (6)$$

La dimostrazione è un'applicazione non banale del principio dell'argomento alla funzione ξ. Il termine principale proviene dalla *formula di Stirling* generalizzata per la funzione Γ di Eulero presente nell'equazione funzionale di ξ. Il termine d'errore proviene essenzialmente da $\arg(\zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}T))$.

Teorema 17 (Formula esplicita). *Per $N \to +\infty$ vale la relazione*

$$\begin{aligned} \psi(N) &= \log \mathrm{mcm}\{1,2,3,\dots,N\} \\ &= N - \sum_{\rho} \frac{N^\rho}{\rho} + \mathcal{O}(\log N) \end{aligned}$$

dove la somma è fatta su tutti gli zeri $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ con $\beta \in (0,1)$ ed è intesa in senso simmetrico, con ρ e $\overline{\rho}$ presi insieme.

La dimostrazione dipende dalla relazione fondamentale valida per $c > 1$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s} \qquad (7)$$

dove $x > 1$ ed $x \notin \mathbb{N}$. Questa trasformazione integrale, di cui vedremo più avanti l'inversa, si chiama trasformata di Mellin ed è formalmente simile alla trasformata di Fourier. Vedi la nota 7.

Hadamard — de la Vallée Poussin

Sono stati necessari quasi 40 anni per dimostrare rigorosamente tutte le affermazioni di Riemann (tranne quella sulla famosa Congettura, naturalmente): si può dire, senza esagerare troppo, che l'analisi complessa sia stata creata nella seconda metà del XIX secolo proprio per raggiungere questo obiettivo. Il risultato finale, il Teorema dei Numeri Primi, è stato dimostrato, indipendentemente e quasi simultaneamente, da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896.

Teorema 18 (dei Numeri Primi)**.** *Esiste una costante positiva c tale che*

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathcal{O}\Bigl(x \exp\bigl(-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}\bigr)\Bigr)$$

Questo *equivale* alla relazione $\psi(x) = x + \mathcal{O}\bigl(x \exp\bigl(-c_1(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}\bigr)\bigr)$, che è più facile da dimostrare grazie alla (7). Si veda una spiegazione nella didascalia della Figura 2. L'ingrediente mancante, che spiega anche la curiosa funzione nel *termine d'errore*, è un'altra informazione sulla distribuzione degli zeri della funzione ζ. Per la precisione, questo è l'unico punto del programma attribuito sopra a Riemann che non è presente nell'originale, visto che è sostanzialmente inutile per dimostrare semplicemente che il limite nella Congettura di Gauss 6 esiste, mentre è indispensabile per valutare la bontà dell'approssimazione. L'apparente anacronismo dei due risultati citati è dovuto al fatto che il Teorema dei Numeri Primi realmente dimostrato da Hadamard e de la Vallée Poussin era leggermente più debole di quello enunciato qui perché, ovviamente, non avevano a disposizione il risultato seguente, ma il meccanismo della loro dimostrazione non cambia se non marginalmente inserendo la versione della regione libera da zeri trovata da Vinogradov e Korobov, indipendentemente, nel 1958.

Teorema 19 (Regione libera da zeri, Vinogradov e Korobov)**.** *Esiste una costante $c > 0$ tale che se $\zeta(\beta + \mathrm{i}\gamma) = 0$ con $\beta \in [0, 1]$ e $\gamma > 0$ allora*

$$\beta < 1 - \frac{c}{(\log\gamma)^{2/3}(\log\log\gamma)^{1/3}}$$

Questa regione libera da zeri si usa insieme alla Formula Esplicita nella sua versione troncata di cui si parla nella didascalia della Figura 2. In effetti si ha

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma \\ |\gamma|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathcal{O}\Bigl(\frac{x}{T}(\log(xT))^2 + \log x\Bigr) \tag{8}$$

La scelta ottimale per T è quella che rende il termine sugli zeri (una somma *finita*) dello stesso ordine di grandezza, essenzialmente, di x/T. Si ha

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\Bigl\{\max_{0<\gamma\le T} x^\beta\Bigr\} \sum_{0<\gamma\le T} \frac{1}{\gamma} + \frac{x}{T}(\log xT)^2\right) \tag{9}$$

dove abbiamo scritto implicitamente $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ per il generico zero non banale di zeta. Si ricordi che gli zeri sono disposti simmetricamente rispetto all'asse reale. Il massimo può essere stimato usando la regione libera da zeri fornita dal Teorema 19, mentre per la somma utilizziamo la stima per il numero degli zeri della funzione zeta con parte immaginaria $|\gamma| \le T$ data dal Teorema 16, con la sommazione parziale. In definitiva, possiamo scrivere

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\Bigl(x(\log T)^2 \exp\Bigl\{-c\frac{\log x}{(\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}}\Bigr\} + \frac{x}{T}(\log xT)^2\Bigr) \tag{10}$$

Ora scegliamo T come funzione di x in modo che

$$\frac{1}{T} \approx \exp\Bigl\{-c\frac{\log x}{(\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}}\Bigr\}$$

per rendere approssimativamente uguali i due termini a destra nella (10). Questo accade se $T = T(x)$ soddisfa $(\log T)^{5/3}(\log\log T)^{1/3} \approx \log x$: invertendo la relazione funzionale si trova $\log T \approx (\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}$. Infine, sostituendo e semplificando otteniamo

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\Bigl(x \exp\{-c_1(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}\}\Bigr) \tag{11}$$

dove c_1 è un'opportuna costante positiva. Come si vede, c'è una relazione "meccanica" fra l'ampiezza della regione libera da zeri e la dimensione del termine d'errore nella (11).

Vedi la nota 8.

Selberg — Erdős

La dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi data da Hadamard e de la Vallée Poussin indipendentemente nel 1896, originata dalle idee di Riemann, è tanto intrinsecamente legata alle proprietà della funzione zeta come funzione olomorfa, da far considerare improbabile, se non proprio impossibile, dimostrare lo stesso risultato usando solo l'analisi reale. In effetti, per alcuni decenni è stata informalmente osservata l'equivalenza espressa dal seguente teorema, dimostrato poi rigorosamente da Wiener nel 1927.

Teorema 20 (Wiener)**.**

$$\zeta(1 + \mathrm{i}t) \neq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\iff \pi(N) \sim \frac{N}{\log(N)}$$

Con una certa sorpresa, dunque, nel 1948 i Teorici dei Numeri accolsero la scoperta, da parte di Selberg ed Erdős, della cosiddetta dimostrazione elementare, che non fa uso dell'analisi complessa. Il suo cuore è il risultato qui sotto.

Teorema 21 (Formula di Selberg)**.**

$$\begin{aligned} &\psi(N)\log(N) + \sum_{p \le N} \psi\left(\frac{N}{p}\right)\log(p) \\ = \quad &2N\log(N) + \mathcal{O}(N) \end{aligned}$$

Una conseguenza immediata di questa e delle formule di Mertens viste sopra è il prossimo Corollario, che fornisce una dimostrazione alternativa del Teorema di Chebyshev 11, poiché implica che $\lambda \le 1 \le \Lambda$.

Corollario 22. *Si ha* $\lambda + \Lambda = 2$.

Per ottenere che $\lambda = \Lambda = 1$ è necessaria una lunga e complicata analisi di tipo *tauberiano* che qui omettiamo. Nelle applicazioni del Teorema dei Numeri primi è però di fondamentale importanza avere delle buone stime per il termine d'errore $\psi(N) - N$: in questo campo, le tecniche "elementari" appaiono più deboli delle tecniche analitiche. Vedi la nota 9.

La Congettura di Riemann

La Congettura e le sue forme equivalenti elementari

Congettura 23 (Riemann)**.** *Tutti gli zeri complessi di ζ della forma $\beta + \mathrm{i}\gamma$ con $\gamma \neq 0$ hanno $\beta = \frac{1}{2}$.*

Questo *equivale* a dire che

$$\begin{aligned} \pi(N) &= \mathrm{li}(N) + \mathcal{O}\left(N^{1/2}\log N\right) \qquad (12)\\ \psi(N) &= N + \mathcal{O}\left(N^{1/2}(\log N)^2\right) \end{aligned}$$

Un'implicazione è conseguenza diretta della Formula Esplicita del Teorema 17, o meglio della sua versione "troncata" (8) descritta nella didascalia della Figura 2, e della Formula di Riemann-von Mangoldt del Teorema 16: basta scegliere $T = x^{1/2}$ nella (9). L'altra dipende dalla trasformazione integrale che lega ζ a ψ

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= s\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{s}{s-1} + s\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \qquad (13) \end{aligned}$$

valida per $\sigma > 1$, che è l'inversa della (7). La connessione fra π e ζ, data originariamente da Riemann nel suo articolo, è più complicata e indiretta, e, poiché coinvolge esplicitamente il logaritmo della funzione ζ, è più difficile da trattare. Vedi la nota 10.

Una versione debole della Congettura di Riemann

Sia

$$\Theta = \sup\{\beta \colon \exists\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } \zeta(\beta + \mathrm{i}\gamma) = 0\}$$

La simmetria degli zeri rispetto ad $s = \frac{1}{2}$ implica che $\frac{1}{2} \le \Theta \le 1$. Sia

$$\Theta' = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \colon \pi(N) = \mathrm{li}(N) + \mathcal{O}(N^{\alpha})\}$$

Teorema 24. *Si ha* $\Theta = \Theta'$.

La formula (13) mostra esplicitamente l'importanza di maggiorazioni forti per $R(x) = \psi(x) - x$.

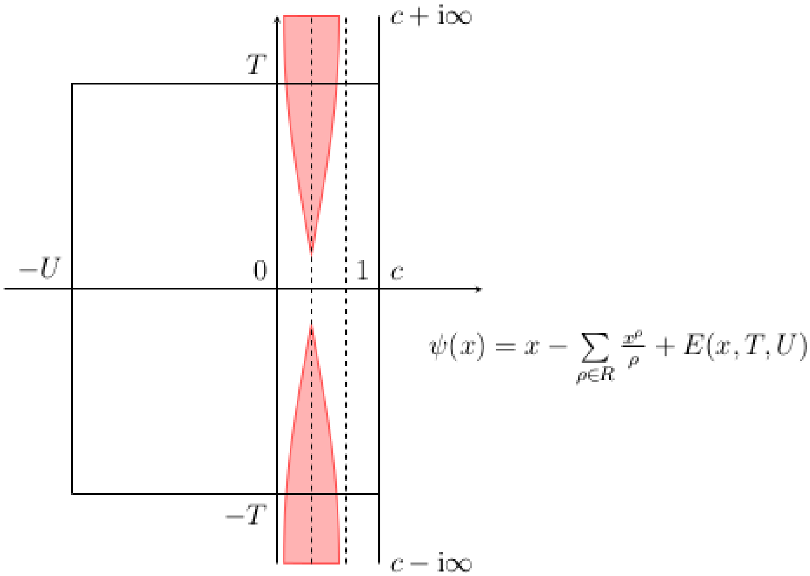

Figura 2: *Il cammino d'integrazione nella (7), la retta verticale dei numeri complessi di parte reale c, viene deformato in un rettangolo R, con vertici in $c \pm \mathrm{i}T$ e $-U \pm \mathrm{i}T$, più le due "code" verticali, da $c + \mathrm{i}T$ a $c + \mathrm{i}\infty$ e la sua simmetrica, per poter usare il Teorema dei Residui sul rettangolo R. Si deve scegliere T con cura (non deve coincidere con l'ordinata di qualche zero di ζ), mentre U è sostanzialmente irrilevante. Il contributo del polo della funzione integranda in $s = 1$ dà il termine principale della Formula Esplicita nel Teorema 17, e gli zeri di ζ compresi nel rettangolo danno il termine secondario. Vi sono naturalmente dei termini d'errore, provenienti dalle code verticali, dai due segmenti ad altezza $\pm T$ e dal segmento verticale sull'ascissa $-U$ che devono essere accuratamente stimati. Facendo tendere separatamente U e T a $+\infty$ si ottiene la Formula Esplicita. In realtà, per le applicazioni è di gran lunga più utile la versione della Formula Esplicita in cui compare T, che poi può essere scelto in funzione di x: questa scelta dipende dall'ampiezza della regione libera da zeri disponibile. In definitiva, il procedimento illustrato sopra permette di scrivere $\psi(x) = x - \sum_{\rho \in R} x^\rho/\rho + E(x, T, U)$ dove E indica un "errore" che è funzione di x, T ed U e che raccoglie i contributi indicati sopra. Gli zeri non banali della funzione ζ sono confinati all'interno della regione colorata. Riemann ha congetturato che tutti gli zeri complessi di ζ (esclusi dunque quelli sull'asse reale negativo), siano sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$.*

Il più semplice risultato in questo direzione è proprio il Teorema appena enunciato: in un verso si dimostra come abbiamo detto sopra, prendendo $T = x^{1-\Theta}$ nella (9); questo implica che $\Theta' \leq \Theta$. L'altra disuguaglianza si ottiene osservando che se $R(x) = \mathcal{O}\left(x^{\Theta'+\varepsilon}\right)$ allora la funzione definita implicitamente dall'integrale all'estrema destra della (13) può essere prolungata analiticamente al semipiano $\sigma > \Theta'$: dunque la funzione a primo membro, in questo semipiano, non può avere poli diversi da $s = 1$ e di conseguenza ζ non ha zeri in questa regione. In sostegno della Congettura di Riemann si noti la sua connessione con l'ampiezza delle colonne al centro e a destra nella Figura 1: la seconda è, come previsto, ampia circa la metà della prima. Vedi la nota 11.

Risultati numerici

Ci limitiamo a qualche breve cenno ai più importanti risultati numerici.

1. I "primi" 10^{13} zeri sono sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$: Gourdon [2].

2. Almeno il 40% degli zeri di ζ (in senso asintotico) è sulla retta critica: Conrey [3].

3. Gli zeri al di fuori della retta critica (sempre se ne esistono) sono relativamente pochi, in un senso quantitativo preciso: Huxley [4].

4. Per tutti gli $x > 3$ per cui è stato calcolato il valore esatto di $\pi(x)$ si ha $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$, ma Littlewood [5] ha dimostrato nel 1914 che $\mathrm{li}(x) - \pi(x)$ cambia segno infinite volte quando $x \to +\infty$.

Vedi la nota 12.

Il Teorema di Beurling

In questo e nei prossimi paragrafi discutiamo di alcune equivalenze, in qualche caso parziali, fra la Congettura di Riemann e risultati di altri campi della matematica. Alcune di queste equivalenze sono "elementari" nel senso che gli enunciati che vedremo non fanno intervenire l'analisi complessa o altra matematica avanzata: è uno dei tanti esempi di enunciati semplici e comprensibili che nascondono difficoltà molto profonde, di cui la Teoria dei Numeri è cosí ricca. A parte i problemi di Landau, con cui concluderemo questa trattazione, ci basti ricordare il Teorema di Fermat. Cominciamo senz'altro con il Teorema di Beurling [6].

Teorema 25 (Beurling, 1955). *Sia C lo spazio vettoriale generato da $\{\rho_\theta \colon 0 < \theta \le 1\}$ definite da*

$$\rho_\theta(x) = \rho(\theta/x) - \theta\rho(1/x) \qquad \text{per } x \in (0,1]$$

dove $\rho(x) = x - [x]$ è la parte frazionaria di x. Sia C^p la chiusura di C in $L^p([0,1])$. Allora ζ non ha zeri con parte reale $\beta > 1/p$ se e solo se $C^p = L^p([0,1])$.

Non è del tutto sorprendente che la funzione ζ sia legata alla funzione parte frazionaria. La formula di sommazione parziale dà, dopo un breve calcolo, la relazione

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\rho(t)}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

Questa formula fornisce, in modo del tutto elementare, il prolungamento analitico della funzione ζ al semipiano dei numeri complessi di parte reale positiva, privato, evidentemente, del punto $s = 1$, poiché ρ è una funzione limitata. Vedi la nota 13.

La Congettura di Mertens

Passiamo ora a descrivere alcune equivalenze elementari, nel senso spiegato qui sopra.

Definizione 26 (Funzione di Möbius). *Sia*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se esiste un primo } p \text{ tale che } p^2 \mid n, \\ (-1)^k & \text{se } n = p_1 \cdots p_k \text{ con } p_1 < \cdots < p_k \end{cases}$$

Poniamo

$$M(N) = \sum_{n \le N} \mu(n) \tag{15}$$

e ricordiamo la stima elementare

$$\sum_{n \le N} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}N + \mathcal{O}\left(N^{1/2}\right)$$

Se un intero generico n ha un numero pari o dispari di fattori primi distinti con uguale "probabilità," allora ci si può aspettare che $M(N) = \mathcal{O}\left(N^{1/2}\log^2 N\right)$. Questo equivale alla Congettura di Riemann. Infatti, M è la somma dei coefficienti della serie di Dirichlet

$$\sum_{n \ge 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

e la stima qui sopra implica che $1/\zeta$ è olomorfa nel semipiano $\sigma > \frac{1}{2}$, e quindi ζ non si annulla nello stesso semipiano. Le due relazioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n \le N} \mu(n) = o(N) \tag{16}$$

sono equivalenti al Teorema dei Numeri Primi nella forma congetturata da Gauss. La prima delle due è stata enunciata per la prima volta da Eulero e dimostrata da Landau: la dimostrazione dell'equivalenza non è semplice. Le due relazioni fondamentali soddisfatte dalla funzione μ sono

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{17}$$

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0,1) \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \tag{18}$$

Vedi la nota 14.

Il Teorema di Franel e Landau

Passiamo ad una cosa ancor più elementare: parliamo di frazioni con denominatori limitati.

Definizione 27 (Frazioni di Farey). *Sia N un intero ≥ 1. Poniamo*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N &= \left\{\frac{a}{q} \colon 0 < a \le q \le N \text{ e } (a,q) = 1\right\} \\ &= \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{\Phi(N)} = 1\} \end{aligned}$$

Per esempio

$$\mathcal{F}_5 = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

Notiamo che $\Phi(N) = |\mathcal{F}_N| \sim 3N^2/\pi^2$ quando $N \to +\infty$.

Teorema 28 (Franel e Landau). *La Congettura di Riemann vale se e solo se per tutti gli $\varepsilon > 0$*

$$\Delta(N) = \sum_{n=1}^{\Phi(N)} \left| x_n - \frac{n}{\Phi(N)} \right| = \mathcal{O}\left(N^{1/2+\varepsilon}\right)$$

Ricordando la definizione (15), la chiave della dimostrazione è la relazione

$$\sum_{n=1}^{\Phi(N)} f(x_n) = \sum_{k \geq 1} M\left(\frac{N}{k}\right) \sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{j}{k}\right) \tag{19}$$

valida per ogni funzione f di periodo 1. Posto $x_n = n/\Phi(N) + \delta_n$ per $n = 1, \ldots, \Phi(N)$, valutiamo la (19) con $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$, osservando che, per una nota proprietà delle radici k-esime dell'unità, la somma interna a destra della (19) vale 0 quando $k > 1$ e vale 1 quando $k = 1$. In definitiva, il secondo membro vale $M(N)$. Dunque

$$M(N) = \sum_{n=1}^{\Phi(N)} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n/\Phi(N)+\delta_n)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\Phi(N)} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n/\Phi(N)}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta_n} - 1) + \sum_{n=1}^{\Phi(N)} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n/\Phi(N)}$$

L'addendo all'estrema destra vale 0 se $N > 1$, mentre per l'altro possiamo usare la disuguaglianza $|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta_n} - 1| = 2|\sin(\pi\delta_n)| \leq 2\pi|\delta_n|$, ottenendo in definitiva $|M(N)| \leq 2\pi\Delta(N)$, che dimostra una delle due implicazioni. L'altra implicazione è più complessa da dimostrare, ma si basa anch'essa sulla (19). Vedi la nota 15.

Il Teorema di Robin

Sorprendentemente, la Congettura di Riemann può essere espressa in modo assolutamente elementare come segue.

Definizione 29 (Numero armonico). *Sia n un intero ≥ 1. Poniamo*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Teorema 30 (Robin). *La Congettura di Riemann è vera se e solo se per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n)\log(H_n) \tag{20}$$

Informalmente, se la Congettura di Riemann fosse falsa esisterebbe una successione divergente $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\pi(x_j) > \mathrm{li}(x_j) + x_j^{1/2+\delta}$, dove $\delta > 0$ è una quantità fissata. Usando i numeri primi in $[1, x_j]$ si potrebbe costruire un intero n_j con un valore $\sigma(n_j)$ più grande della norma e tale da falsificare, seppur di poco, la (20).

I problemi di Landau

Nel 1912 il grande matematico tedesco Edmund Landau propose una lista di importanti problemi aperti all'International Congress in Mathematics, a Cambridge.

Congettura 31. *È vero che n^2+1 è primo per infiniti n?*

Congettura 32. *È vero che $n = p_1 + p_2$ ha sempre soluzione se $n \geq 4$ è pari?*

Congettura 33. *È vero che $p_{n+1}-p_n = 2$ per infiniti n?*

Congettura 34. *È vero che esiste un numero primo tra n^2 ed $(n+1)^2$ per ogni n?*

Vedi la nota 16.

Il primo problema di Landau: valori primi di polinomî

Hardy & Littlewood [7] hanno congetturato che

$$|\{n \leq N \colon n^2 + 1 \text{ è primo}\}| \sim C\frac{N}{\log(N)}$$

per una certa costante esplicita $C > 0$. Fermat ha osservato che il polinomio $X^2 + Y^2$ rappresenta $p = 2$ e tutti i numeri primi $p \equiv 1 \bmod 4$. Friedlander & Iwaniec [8] ed Heath-Brown [9] hanno dimostrato che i polinomî $X^2 + Y^4$ e $X^3 + 2Y^3$ assumono valori primi per infiniti valori interi delle variabili. L'unico caso noto ad oggi di polinomio in una variabile che assume infiniti valori primi è quello del Teorema di Dirichlet 8. Vedi la nota 17.

Il secondo problema di Landau, o problema di Goldbach

Hardy & Littlewood [7] hanno congetturato che

$$\begin{aligned} r_2(n) &= |\{(p_1, p_2) \colon p_1 + p_2 = n\}| \\ &\sim C \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \frac{n}{(\log(n))^2} \end{aligned}$$

per una certa costante esplicita $C > 0$, se n è pari e grande. Oggi è noto che il numero degli $n \leq N$ pari per cui questa formula non è accurata non supera $N/(\log N)^A$ per ogni $A > 0$ fissato ed $N \geq N_0(A)$. Pintz [10] ha dimostrato che

$$|\{n \leq N \colon \ n \text{ è pari e } r_2(n) = 0\}| \leq N^{2/3}$$

per N sufficientemente grande. Vinogradov [11] ha dimostrato che *tutti* i numeri dispari $n \geq N_0$ si possono rappresentare come somma di 3 numeri primi. Helfgott [12] ha recentemente chiuso la questione dimostrando che $N_0 = 7$. In questo particolare problema, la Congettura di Riemann non è utile. Vedi la nota 17.

Il terzo problema di Landau, o problema dei primi gemelli

Hardy & Littlewood [7] hanno congetturato che, se $h > 0$ è un intero pari fissato, allora

$$|\{p \leq N \colon p + h \text{ è primo}\}| \sim C \prod_{\substack{p \mid h \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \frac{N}{(\log(N))^2}$$

per $N \to +\infty$, e per una certa costante esplicita $C > 0$. Partendo da risultati rivoluzionari di Goldston, Pintz & Yıldırım (2006–2013), Zhang [13] ha dimostrato recentemente la congettura

$$\liminf_{n \to +\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq C < +\infty$$

Zhang ha fornito la maggiorazione $C \leq 7 \cdot 10^7$. Maynard [14] (19 novembre 2013) dà $C \leq 600$. Secondo Maynard il limite del metodo è $C = 12$. Siamo dunque lontani dall'avere $C = 2$, e lontanissimi dalla versione quantitativa congetturata da Hardy & Littlewood. Vedi la nota 19.

Il quarto problema di Landau: numeri primi fra quadrati

La Congettura di Riemann implica che

$$p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}\Big(p_n^{1/2} (\log p_n)^2\Big)$$

Infatti, dalla (12) valutata in x ed in $x + y$ segue che $\pi(x + y) - \pi(x) > 0$ se $y > C x^{1/2} (\log x)^2$ dove C è una costante sufficientemente grande. Si congettura (Cramér, 1932) che

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log p_n)^2} < +\infty$$

Baker, Harman & Pintz [15] hanno dimostrato che

$$p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}\big(p_n^{0.525}\big)$$

Si può congetturare che $\pi(x+y) - \pi(x) \sim y / \log x$ se $y \leq x$, purché y non sia troppo piccolo. Questa relazione è probabilmente vera, per esempio, se $y = x^\alpha$, dove $\alpha > 0$ è fissato; in questo caso si avrebbe $p_{n+1} - p_n = \mathcal{O}(p_n^\alpha)$.

La formula di sommazione parziale

Diamo la formula di sommazione parziale con un breve cenno della sua dimostrazione. Se $\phi \in \mathcal{C}^1([1, x])$ ed $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri complessi qualsiasi, allora

$$\sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = A(x)\phi(x) - \int_1^x A(t)\phi'(t) \, \mathrm{d}t$$

dove

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n \tag{21}$$

Posto $N = \lfloor x \rfloor$ e usando il fatto che A è costante fra due interi consecutivi, si ha

$$\begin{aligned} &\int_1^x A(t)\phi'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} A(t)\phi'(t) \, \mathrm{d}t + \int_N^x A(t)\phi'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} A(n) \int_n^{n+1} \phi'(t) \, \mathrm{d}t + A(N) \int_N^x \phi'(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Si integra e si trova una somma "telescopica" dove si sfrutta il fatto che $A(n+1) - A(n) = a_{n+1}$. Riordinando la somma si trova la (21).

Note e spunti per letture ulteriori

Introduzione storica

Si veda il bell'articolo di Bateman & Diamond [16].

Nota 1

La nostra dimostrazione del Teorema di Euclide è diversa da quella data di solito, e ricorda il Teorema di Wilson: $p \geq 2$ è un numero primo se e solo se $p \mid (p-1)! + 1$. Per esempio, $6! + 1 = 721 = 7 \cdot 103$, mentre $10! + 1 = 3628801 = 11 \cdot 329891$. Si tratta di una delle più semplici, e inutili, caratterizzazioni dei numeri primi.

Nota 2

La funzione ζ era stata già introdotta in casi particolari già un secolo prima di Eulero: ricordiamo solo il cosiddetto Problema di Mengoli del 1644, che, nel linguaggio moderno, corrisponde ad esprimere il valore di $\zeta(2) = \pi^2/6$ in termini finiti.

Nota 3

Si osservi che la (2) è una *serie asintotica*: si può prendere n arbitrariamente grande, ma non esiste il limite per $n \to +\infty$ del secondo membro per il Teorema di Hadamard sul raggio di convergenza delle serie di potenze. Una discussione dei metodi per il calcolo numerico esatto di $\pi(N)$ si trova in Deléglise & Rivat [17], a cui si deve il valore di $\pi(10^{18})$: naturalmente, questi numeri primi non sono conosciuti individualmente. Il valore esatto di $\pi(10^{25})$ dato nella Figura 1 è stato annunciato nel maggio del 2013 da J. Buethe, J. Franke, A. Jost e T. Kleinjung.

Sono note disuguaglianze precise per p_n: qui diamo due delle più semplici.

$$\begin{aligned} & n\bigl(\log(n) + \log(\log(n)) - 1\bigr) \\ \leq \quad & p_n \leq n\bigl(\log(n) + \log(\log(n))\bigr) \end{aligned}$$

dove quella a sinistra è valida per $n \geq 2$ e l'altra per $n \geq 6$. Sono dovute a Dusart [18] e Rosser [19] rispettivamente. La formula di Legendre è discussa in Pintz [20].

Nota 4

La distribuzione dei numeri primi nelle progressioni aritmetiche è trattata in grande dettaglio in Davenport [21] con particolare attenzione agli aspetti quantitativi, inclusa l'uniformità in q, nonché alla sua rilevanza per applicazioni come il Problema di Goldbach.

Nota 5

La definizione usuale della funzione ψ di Chebyshev è

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

dove

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{se esiste } m \in \mathbb{N}^* \\ & \text{ tale che } n = p^m,\ p \text{ primo,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Λ è detta funzione di von Mangoldt. Quest'ultima, a sua volta, può essere definita mediante l'identità $-\zeta'/\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)/n^s$, che si ottiene derivando il logaritmo dell'Identità di Eulero (1). Una importante proprietà di Λ è espressa dall'identità $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$.

La dimostrazione della minorazione nel Teorema 10 è quella di Nair [22], dove si trova anche la maggiorazione corrispondente.

Nota 6

Si noti che l'uguaglianza a sinistra nella (4) può essere riscritta come

$$\log(N!) = \sum_{n \leq N} \psi\Bigl(\frac{N}{n}\Bigr)$$

la quale a sua volta suggerisce che $\psi(N) \sim N$, equivalente alla Congettura di Gauss 6.

Legendre [23] ha dimostrato che l'esponente $\nu_p(N)$ cercato nella dimostrazione del Teorema 14, e cioè la massima potenza del numero primo p che divide $N!$, vale esattamente $(N - s_p(N))/(p-1)$, dove $s_p(N)$ indica la somma delle cifre di N quando è scritto in base p.

Infatti, è sufficiente scrivere $N = N_1 p + r$ con $r \in [0, p-1]$ e procedere per induzione, supponendo che la formula di Legendre valga per N_1 e osservando infine che questa è banale se $N < p$ cioè se $N_1 = 0$, poiché $\nu_p(m) = 0$ se $m < p$. In alternativa, si può sfruttare il fatto che la j-esima cifra di N scritto in base p è $\lfloor N/p^j \rfloor - p\lfloor N/p^{j+1} \rfloor$.

Nota 7

L'articolo originale di Riemann [1] è tradotto e dettagliatamente commentato in Edwards [24]; si veda anche Davenport [21], §8. È certo che Eulero conosceva l'equazione funzionale (almeno in casi particolari): infatti quest'ultima si può ottenere formalmente manipolando la definizione di ζ ed usando con cautela proprietà non ovvie della funzione Γ. Il suo punto di partenza può essere stata la formula (14): si sostituisce lo sviluppo in serie di Fourier per ρ, integrando poi la serie termine a termine. Per i dettagli si veda Titchmarsh [25], p. 15 oppure Hardy [26], §2.2.

Per la teoria generale della funzione ζ, oltre alle monografie di Edwards e Titchmarsh appena menzionate, si veda anche Ivić [27]. Una discussione della formula esplicita per la funzione π si trova in Zagier [28], del quale consigliamo in particolare i grafici che rendono evidente la bontà dell'approssimazione scoperta da Riemann.

Osserviamo che le relazioni (7) e (13) rappresentano una coppia trasformata e anti-trasformata di Mellin, che formalmente sono trasformazioni dello stesso tipo di quella di Fourier, e il cui esempio più noto è la coppia e^{-x}, $\Gamma(s)$. Infatti, ricordiamo che per $\sigma = \Re(s) > 0$ e $c > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \\ e^{-x} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \Gamma(s) x^{-s}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

e, in generale, sotto opportune condizioni di sommabilità per f si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f, s) &= \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathcal{M}(f, s) x^{-s}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Prendendo formalmente $y = \log x$ nell'integrale a sinistra si trova la trasformazione di Fourier. Per la precisione, $\psi(x^{-1})$ è l'anti-trasformata di Mellin di $-s^{-1}\zeta'/\zeta(s)$.

Nota 8

La dimostrazione dettagliata del Teorema dei Numeri Primi 18 si trova in Davenport [21].

Nota 9

La dimostrazione elementare del Teorema dei Numeri Primi è all'origine di una controversia sulla priorità fra Selberg, che ha certamente scoperto le formule che portano il suo nome, ed Erdős, che le ha usate per dedurne, probabilmente per primo, il Teorema dei Numeri Primi. Per i dettagli e per informazioni di prima mano, si veda Goldfeld [29]. La dimostrazione elementare è presentata nel Capitolo 22 di Hardy & Wright [30] e in Levinson [31]. È anche istruttivo leggere la recensione che Ingham [32] scrisse dei due lavori di Selberg e di Erdős, nella quale mette in luce le analogie strutturali tra la dimostrazione elementare e quella analitica. Ulteriori dettagli sull'equivalenza dimostrata da Wiener si trovano nel libro di Ingham [33], §2.11. Una semplice dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi che sfrutta solo proprietà della funzione zeta in una regione limitata del semipiano $\sigma \geq 1$, e dunque nello spirito di quella originale di Wiener, si trova in Newman [34]. Si veda anche Zagier [35].

La Congettura di Riemann

Nota 10

Si vedano Bombieri [36] e Conrey [37] per delle ampie panoramiche in cui la Congettura di Riemann è inquadrata nel suo contesto generale.

È opportuno notare che non soltanto $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ cambia segno infinite volte, ma, più in generale, $\pi(x) - \mathrm{li}(x) = \Omega_\pm(x^{1/2}(\log\log\log x)/\log x)$ (Littlewood [5]), dove $f = \Omega_\pm(g)$ significa che $\liminf_{x\to+\infty} f(x)/g(x) < 0$ e $\limsup_{x\to+\infty} f(x)/g(x) > 0$. Un risultato più forte vale se la Congettura di Riemann è *falsa*. Vedi anche Ingham [33] §§4.8–4.9.

Nota 11

Si veda la discussione nel Capitolo 4 di Ingham [33].

Nota 12

Si veda Gourdon [2]. La funzione ξ è reale sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$ ed esiste una formula accurata per la funzione $N(T)$ definita nella (6): si contano i cambiamenti di segno di ξ fra $s = \frac{1}{2}$ ed $s = \frac{1}{2} + iT$. Si veda Conrey [3] per il secondo risultato enunciato. Si può dimostrare che il numero di zeri $\rho = \beta + i\gamma$ con $\gamma \in [0, T]$ e $\beta \neq \frac{1}{2}$ è $o(N(T))$. I cosiddetti *Teoremi di densità* forniscono stime molto precise per il loro numero: naturalmente, se è vera la Congettura di Riemann non ve ne sono affatto. Bays & Hudson [38] hanno dimostrato nel 2000 che $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$ per qualche $x \leq 1.39822 \cdot 10^{316}$.

Nota 13

Questa caratterizzazione della Congettura di Riemann è oggetto di risultati recenti di numerosi autori, tra cui citiamo Baez-Duarte & Balazard.

Nota 14

La stima elementare citata è il Teorema 333 di Hardy & Wright [30]. La dimostrazione della prima delle (16) si trova nel §5.6 di Edwards [24]. La Congettura di Mertens originale è falsa: ne abbiamo dato una versione leggermente indebolita.

Diamo un cenno alla dimostrazione delle formule (17) e (18): la prima si dimostra osservando che $\mu(pm) = -\mu(m)$ se p è un numero primo che non divide m. Usando iterativamente questa proprietà, se $n > 1$ il primo membro può essere riscritto come $(1 + \mu(p_1)) \cdots (1 + \mu(p_k))$ dove p_1, …, p_k sono i fattori primi *distinti* di n, e questa quantità vale evidentemente 0. Sia ora $f(x)$ il primo membro della (18) e osserviamo che f è costante a tratti e ovunque continua a destra su $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ (poiché $\lfloor x/n \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor / n \rfloor$ per ogni $x \geq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$), e che su $\mathbb{N}^*$ può avere discontinuità di salto. Per concludere è dunque sufficiente dimostrare che f è continua a sinistra in tutti gli N naturali con $N \geq 2$. Scelto $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, osserviamo che

$$\begin{aligned} & f(N) - f(N-\varepsilon) \\ = & \sum_{n \leq N-\varepsilon} \left(\left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N-\varepsilon}{n} \right\rfloor \right) \mu(n) + \mu(N) \\ = & \sum_{n | N} \mu(n) = 0 \end{aligned}$$

e dunque la formula (18) segue dalla (17). Il passaggio cruciale della catena di uguaglianze qui sopra è quello in cui si riconosce che se $N \geq 2$ è intero ed $\varepsilon \in (0,1)$, allora $\lfloor N/n \rfloor = \lfloor (N-\varepsilon)/n \rfloor$ se n non è un divisore di N.

Una dimostrazione alternativa richiede di scrivere $\lfloor x/n \rfloor = \sum_{m \leq x/n} 1$ nella definizione di f e di procedere con lo scambio delle somme ed un riordinamento degli addendi, un trucco standard della Teoria dei Numeri. Concludiamo notando che la (17) può essere interpretata come una sorta di ortogonalità rispetto al prodotto scalare (n, m), massimo comun divisore fra n ed m.

Nota 15

La formula (19) segue dalla (18) mediante scambio della somma, usando il fatto che

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} M\left(\frac{x}{m}\right) &= \sum_{m \leq x} \sum_{n \leq x/m} \mu(n) \\ = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n} 1 &= \sum_{m \leq x} \mu(m) \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

Infatti, se $x_n = a/q$ con a e q primi fra loro e $q \leq N$, allora $f(x_n)$ compare al secondo membro della (19) con un peso $M(N/q) + M(N/2q) + M(N/3q) + \dots$, dove la somma è finita perché $M(x) = 0$ per $x < 1$, e si usa la relazione qui sopra con $x = N/q$. Tutti i dettagli si possono trovare in Edwards [24] §12.2.

Nota 16

Per i dettagli si veda Lagarias [39].

I problemi di Landau

I quattro problemi di Landau sono discussi dettagliatamente in Pintz [40].

Nota17

L'osservazione di Fermat è il Teorema 251 di Hardy & Wright [30]. La Congettura di Hardy & Littlewood è un caso particolare della Congettura di Schinzel & Sierpiński sui valori primi assunti da polinomî in una variabile.

Congettura 35 (Schinzel & Sierpiński)**.** *Dato $f \in \mathbb{Z}[n]$ di grado $d \geq 1$ sia*

$$\omega(p) = \operatorname{card}(\{f(\mathbb{N}) \bmod p\}) = \operatorname{card}(\{h \bmod p \colon \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } f(n) \equiv h \bmod p\})$$

Se f è irriducibile su $\mathbb{Z}$ ed $\omega(p) < p$ per tutti i numeri primi p, allora f assume valore primo per infiniti $n \in \mathbb{N}$.

Le due condizioni su f sono evidentemente necessarie, e la seconda è automaticamente verificata per $p > d$. In generale, Bateman & Horn hanno addirittura congetturato che, se sono soddisfatte le ipotesi della congettura di Schinzel & Sierpiński ed f ha primo coefficiente positivo, allora

$$\operatorname{card}(\{n \in \mathbb{N} \colon f(n) \leq x \text{ ed è primo}\}) \sim C(f)\frac{x^{1/d}}{\log x} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

dove $C(f) > 0$ è un'opportuna costante esplicita che può essere definita mediante un prodotto infinito sui numeri primi che dipende essenzialmente dai valori $\omega(p)$. Si vedano le note per il Capitolo introduttivo di Halberstam & Richert [41].

Nota 18

Un'argomentazione euristica elementare in sostegno delle formule asintotiche congetturate da Hardy & Littlewood nel secondo e terzo problema di Landau si può trovare in Zaccagnini [42].

Nota 19

Citiamo i risultati in norma L^2 per $\psi(x+y) - \psi(x) - y$: poniamo

$$J(x,y) = \int_x^{2x} \left|\psi(t+y) - \psi(t) - y\right|^2 \mathrm{d}t$$

una quantità che potremmo chiamare varianza dei numeri primi. Selberg [43] ha dimostrato che la Congettura di Riemann implica che $J(x,y) = \mathcal{O}\big(xy(\log(2x/y))^2\big)$, uniformemente per $1 \leq y \leq x$. Questo significa che la formula asintotica vale "quasi ovunque" anche per y molto piccolo rispetto ad x, se è vera la Congettura di Riemann. In particolare, la relazione $\psi(t+y) - \psi(t) \sim y$ vale per quasi tutti i $t \in [x, 2x]$ non appena $y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}$.

[1] G. F. B. Riemann: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pages 671–680, 1859. In "Gesammelte Mathematische Werke" (ed. H. Weber), Dover reprint 1953.

[2] X. Gourdon: "The 10^{13} first zeros of the Riemann zeta-function, and zeros computation at very large height", (2004). Available from: `http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf`.

[3] J. B. Conrey: "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line", *J. reine angew. Math.* **399** (1989) 1–26.

[4] M. Huxley: *The Distribution of Prime Numbers*, Clarendon Press, Oxford (1972).

[5] J. E. Littlewood: "Sur la distribution des nombres premiers", *C. R. Acad. Sc. Paris* **158** (1914) 1869–1872.

[6] A. Beurling: "A closure problem related to the Riemann zeta-function", *Proc. Acad. Sci. U.S.A.* **41** (1955) 312–314.

[7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood: "Some problems in "Partitio Numerorum"; III. On the expression of a number as a sum of primes", *Acta Math.* **44** (1923) 1–70.

[8] J. Friedlander and H. Iwaniec: "The polynomial $x^2 + y^4$ captures its primes", *Ann. Math.* **148** (1998) 945–1040.

[9] D. R. Heath-Brown: "Primes represented by $x^3 + 2y^3$", *Acta Math.* **186** (2001) 1–84.

[10] J. Pintz: *Recent results on the Goldbach conjecture*, In W. Schwarz and J. Stending, editors, *Proceedings of the ELAZ Conference, May 24–28, 2004*, pages 220–254, Stuttgart, Franz Steiner Verlag (2006).

[11] I. M. Vinogradov: "Some theorems concerning the theory of primes", *Mat. Sb.* **N.S.2** (1937) 179–195.

[12] H. A. Helfgott: "Major arcs for Goldbach's problem", *Arxiv preprint* (2013) 1305.2897.

[13] Y. Zhang: "Bounded gaps between primes", *Ann. Math.* (2013) accettato per la pubblicazione.

[14] J. Maynard: "Small gaps between primes", *Arxiv preprint* (2013) 1311.4600.

[15] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz: "The difference between consecutive primes, II", *Proc. London Math. Soc. (3)* **83** (2001) 532–562.

[16] P. T. Bateman and H. G. Diamond: "A hundred years of prime numbers", *Amer. Math. Monthly* **103** (1996) 729–741.

[17] M. Deléglise and J. Rivat: "Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method", *Math. Comp.* **65** (1996) 235–245.

[18] P. Dusart: "The k-th prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$", *Math. Comp.* **68(225)** (1999) 411–415.

[19] J. B. Rosser: "Explicit bounds for some functions of prime numbers", *Amer. J. Math.* **63** (1941) 211-232.

[20] J. Pintz: "On Legendre's prime number formula", *Amer. Math. Monthly* **87** (1980) 733–735.

[21] H. Davenport: *Multiplicative Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, v.74, III ed, Springer (2000).

[22] M. Nair: "On Chebyshev-type inequalities for primes", *Amer. Math. Monthly* **89** (1982) 126–129.

[23] A. M. Legendre: *Essai sur la Théorie des Nombres*, Paris, III ed (1830).

[24] H. M. Edwards: *Riemann's Zeta Function*, Dover, ristampa dell'edizione Academic Press, 1974 (2001).

[25] E. C. Titchmarsh: *The Theory of the Riemann Zeta–Function*, Oxford University Press, Oxford, II ed (1986).

[26] G. H. Hardy: *Divergent Series*, Chelsea, New York, II ed (1991).

[27] A. Ivić: *The Theory of the Riemann Zeta–Function*, J. Wiley, New York (1985).

[28] D. Zagier: "The first 50 million prime numbers", *The Mathematical Intelligencer* **0** (1977) 7–19.

[29] D. Goldfeld: *The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective*, In "Number theory (New York, 2003)", p. 179–192, Springer, New York (2004).

[30] G. H. Hardy and E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Oxford, V ed (1979).

[31] N. Levinson: "A motivated account of an elementary proof of the Prime Number Theorem", *Amer. Math. Monthly* **76** (225–245) 1969.

[32] A. E. Ingham: "Review", *Mathematical Reviews* **10** (1949) 595–596.

[33] A. E. Ingham: *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[34] D. J. Newman: "Simple analytic proof of the Prime Number Theorem", *Amer. Math. Monthly* **87** (1980) 693–696.

[35] D. Zagier: "Newman's short proof of the prime number theorem", *Amer. Math. Monthly* **104** (1997) 705–708.

[36] E. Bombieri. "Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis" (2000). Si veda: `http://www.claymath.org/prize_problems/index.html`.

[37] J. B. Conrey: "The Riemann Hypothesis", *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003) 341–353.

[38] C. Bays and R. H. Hudson: "A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$", *Math. Comp.* **69(231)** (2000) 1285–1296.

[39] J. Lagarias: "An elementary problem equivalent to the Riemann Hypothesis", *Amer. Math. Monthly* **109** (2002) 534–543.

[40] J. Pintz: "Landau's problems on primes", *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* **21** (2009) 357–404.

[41] H. Halberstam and H.-E. Richert: *Sieve Methods*, Academic Press, London (1974).

[42] A. Zaccagnini: "Variazioni Goldbach: problemi con numeri primi", *L'Educazione Matematica, Anno XXI, Serie VI* **2** (2000) 47–57. `http://people.math.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/papers/Goldbach_I.pdf`

[43] A. Selberg: "On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes", *Arch. Math. Naturvid.* **47** (1943) 87–105.

Alessandro Zaccagnini: Professore associato di Analisi Matematica all'Università di Parma, si occupa di Teoria Analitica dei Numeri. Ha pubblicato principalmente risultati su problemi additivi del tipo di quello di Goldbach e sue varianti, e sulle connessioni fini tra posizione degli zeri della funzione zeta di Riemann e il termine di resto in varie forme del Teorema dei Numeri Primi. Ha anche pubblicato diversi saggi e articoli divulgativi.