
Un matematico passeggia per l'Alhambra

Rafael Pérez Gómez

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, Granada, Spagna

La búsqueda y recreación de la belleza del mundo ha sido una tarea incansable de todas las culturas aparecidas en nuestro mundo que se plasma en la Historia del Arte. Para lograrlo, han sido necesarios múltiples análisis, hechos en contextos muy diversos y variados, que han dado lugar a modelos teóricos que han permitido reflejarla en casos singulares. La belleza de la Alhambra de Granada, fruto de la cultura nazarí, nace de la Geometría con la que han sido creadas sus formas mostrando, de forma completamente abstracta, simbólica, la Unidad (de Allah) entre la multiplicidad que hoy interpretamos mediante la teoría matemática de Grupos Cristallográficos Planos.

La Alhambra de Granada fue declarada Patrimonio de la Humanidad en el año 1984. La justificación, breve, que figura en el correspondiente expediente de catalogación dice que: *El bien incluye logros artísticos únicos. Es un testimonio excepcional de la España musulmana del siglo XIV. Ofrece un ejemplo valioso de las residencias árabes del medioevo.*

Quien conoce la Alhambra sabe bien que es única, excepcional y paradigmática. Hay pocos

La ricerca e la ri-produzione della bellezza del mondo è stato uno scopo incessante di tutte le culture apparse nel nostro mondo che si plasma attorno alla Storia dell'Arte. Per ottenere questi risultati sono state necessarie analisi multiple, fatte in contesti molto differenti e vari, che hanno prodotto modelli teorici che hanno permesso di riflettersi in casi singolari. La bellezza dell'Alhambra di Granada, frutto della cultura nazarí, nasce dalla Geometria con la quale sono state create le sue forme mostrando in forma completamente astratta, simbolica, l'Unità (di Allah) nella molteplicità che oggi interpretiamo mediante la teoria matematica dei Gruppi Cristallografici Piani.

L'Alhambra di Granada fu dichiarata Patrimonio dell'umanità nell'anno 1984. La motivazione, breve, che appare nella pratica di catalogazione dice che: *Il bene incorpora apici artistici unici. È una testimonianza eccezionale della Spagna mussulmana del secolo XIV. Offre un valido esempio delle residenze arabe del medioevo.*

Chi conosce l'Alhambra sa bene che è unica, eccezionale e paradigmatica. Ci sono pochi luo-

lugares en los que pueda apreciarse el color en el aire, el murmullo de los pensamientos de un pueblo culto o los continuos quiebros a la interpretación de los sentidos. Desde este punto de vista se entiende fácilmente su carácter universal como obra de arte: utiliza todos los lenguajes posibles para que cualquiera pueda comunicarse con sus creadores a través del monumento. Es bien conocido que las paredes de la Alhambra hablan, que forman las páginas de un gran libro que trata, fundamentalmente, sobre Historia, Religión, Sociología, Ciencia y Tecnología y que está escrito haciendo uso de la Poesía y la Geometría como herramientas de la Arquitectura que, a su vez, utiliza el Amor como el mejor de los materiales de construcción de todas las épocas. *Cómo un edificio hecho con cuatro palitroques está aún en pie?* El Dr. García Gómez, uno de los mejores arabistas que hemos tenido, hace esta pregunta en su libro "Poemas en los muros y fuentes de la Alhambra"; a su vez, D. Emilio respondía: ha sido gracias al amor, porque la Alhambra ha sido siempre vivida, querida y, por tanto, conservada.

Desde hace muy poco tiempo, la Alhambra ha cobrado un inusitado interés en el mundo de las Matemáticas. Se sabe desde hace tiempo que la belleza de sus trazados obedece a la aplicación de una estética basada en el uso de proporciones tanto pitagóricas como áureas. El mejor ejemplo de esta última lo tenemos en la fachada del palacio de Comares que está diseñada milimétricamente haciendo uso de rectángulos áureos y sus correspondientes recíprocos internos.

Sin embargo, aún siendo todo esto de gran interés, el estudio de su simetría uni y bidimensional es del máximo interés. Desde que H. Weyl escribiera su libro sobre Simetría, se abre una historia para mi apasionante. Dedicué una temporada de mi vida a investigar qué Matemáticas servían para crear ese gran caleidoscopio de color llamado Alhambra. Como se verá más adelante, tuve la fortuna de dar con ciertas claves utilizadas en sus mosaicos, claves muy sencillas que se ocultan magistralmente y que hacen buena la afirmación de Ortega de que el arte es prestidigitación sublime y genial transformismo. Además, demostré que fueron agotadas empíricamente todas las combinaciones básicas posibles para componerlos. Todo esto hace que la Alhambra tenga hoy ese especial interés para los matemáticos al que

ghi nei quali si può apprezzare il colore nell'aria, il mormorio dei pensieri di un popolo colto o le continue finte all'interpretazione dei sentimenti. Da questo punto di vista si percepisce facilmente il suo carattere universale come opera d'arte: usa tutti i linguaggi possibili perché chiunque possa comunicare con i suoi creatori attraverso il monumento. È noto che le pareti dell'Alhambra parlano, che formano le pagine di un grande libro che tratta, fondamentalemente, di storia, religione, sociologia, scienza e tecnologia, e che è scritto facendo uso della poesia e della geometria come strumenti dell'Architettura che, a sua volta, usa l'Amore come il miglior materiale di costruzione di ogni epoca. *Com'è possibile che un edificio fatto con quattro paletti sia ancora in piedi?* Il Dr. García Gómez, uno dei migliori arabisti che abbiamo avuto, fa questa domanda nel suo libro "Poemas en los muros y fuentes de la Alhambra"; a sua volta, Don Emilio (García Gómez) rispondeva: è stato grazie all'amore, perché l'Alhambra è sempre stata vissuta, amata e, quindi, conservata.

Da molto poco tempo, l'Alhambra ha guadagnato un inusitato interesse nel mondo della Matematica. Si sa da tempo che la bellezza dei suoi tratti obbedisce all'applicazione di un'estetica basata sull'uso delle proporzioni tanto pitagoriche che auree. Il miglior esempio di queste ultime l'abbiamo nella facciata del palazzo de Comares che è disegnata millimetricamente facendo uso di rettangoli aurei e dei suoi corrispondenti reciproci interni.

Ad ogni modo, pur essendo tutto questo di grande interesse, lo studio della sua simmetria uni- e bi-dimensionale è del massimo interesse. Fin da quando H. Weyl scrisse il suo libro sulla Simmetria, si apre una storia che ritengo appassionante. Ho dedicato una parte della mia della mia vita a studiare quali matematiche servissero per creare questo grande caleidoscopio di colori chiamato Alhambra. Come vedremo più in là, ho avuto la fortuna di trovare certe chiavi utilizzate nei suoi mosaici, chiavi molto semplici che si nascondono magistralmente e che confermano l'affermazione di Ortega che l'arte è gioco di prestigio sublime e trasformismo geniale. Inoltre, ho dimostrato che furono esaurite empiricamente tutte le combinazioni possibili per comporli. Tutto questo fa che l'Alhambra abbia oggi per i

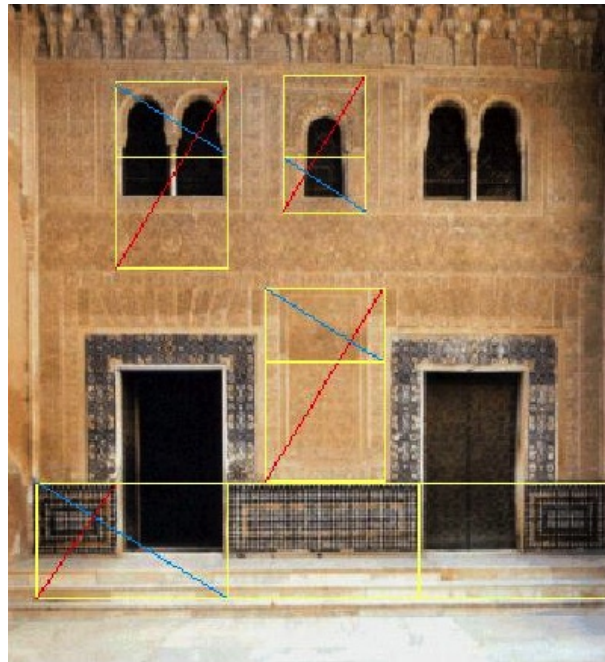


Figura 1: Alhambra, facciata del Palazzo de Comares.

antes me refería, ya que los tracistas andalusíes-granadinos pusieron de manifiesto con su trabajo una forma de abordar el trabajo científico mediante la cual indios y arábigo-parlantes desarrollaron la ciencia hasta la Edad Media: la búsqueda de nuevas ideas desde el ejercicio libre y audaz del método heurístico. Aquellos tracistas granadinos fueron capaces de desarrollar, en los mosaicos de la Alhambra, las 17 posibilidades que hoy conocemos desde el descubrimiento de los rayos X y la Teoría de Grupos Cristallográficos Planos. Es más, la Alhambra es, actualmente, el único monumento construido antes del descubrimiento de la teoría de grupos que cuenta con al menos un ejemplo de cada uno de los grupos cristallográficos planos.

17 Grupos cristallográficos planos

Es cierto que cada mosaico podría definir una página para un tratado de Geometría con regla y compás (con juegos de cartabones y compases rígidos [1], para ser más precisos). Mas no es esta la intención de estos párrafos. Cuando admiramos un astrolabio, un manuscrito, una herramienta propia de la Medicina o de la Ingeniería, valoramos el nivel de conocimiento de

matemáticos l'interesse speciale per i matematici al quale mi riferivo, poiché i progettisti andalusíes-granadini resero manifesta con il loro lavoro una forma di affrontare il lavoro scientifico mediante la quale indiani e arabo-parlanti svilupparono la scienza fino al medio evo: la ricerca di nuove idee e pratiche dall'esercizio libero e audace del metodo euristico. Quei progettisti granadini furono capaci di sviluppare nei mosaici dell'Alhambra le 17 possibilità che oggi conosciamo dalla scoperta dei raggi X e la teoria dei gruppi cristallografici piani. Di più, l'Alhambra è, attualmente, il solo monumento costruito prima della scoperta della teoria dei gruppi che possiede almeno un esempio di ognuno dei gruppi cristallografici piani.

17 Gruppi cristallografici piani

Sicuramente ogni mosaico potrebbe essere usato come la pagina di un trattato di geometria da farsi con righello e compasso [1] (con riga e compassi rigidi per essere più preciso). Non è questa l'intenzione di questi paragrafi. Quando ammiriamo un astrolabio, un manoscritto, uno strumento di medicina o dell'ingegneria, apprezziamo il livello di conoscenza dei suoi creatori e

sus creadores y nos admiramos por ello, pero no serían los objetos más adecuados, pongamos por caso, para explicar teorías sobre cirugía con rayos láser. Los mosaicos de la Alhambra de Granada constituyen, hoy en día, la mejor, y más valiosa, colección de ejemplos de la moderna teoría matemática de Grupos, de ahí que constituyan un auténtico legado cultural con valor científico actual.

Es normal encontrar en libros de Historia de la Ciencia afirmaciones acerca de que la producción en lengua árabe en el campo de la fundamentación científica fue escasa. En particular, en cuanto a Matemáticas se refiere, se dice que se limitaron casi exclusivamente a traducir obras griegas e indias que fueron introducidas en Europa, algunas a través de al-Andalus. Sin embargo, ante la evidencia de los manuscritos que se han ido descubriendo, hay que aceptar que su aportación al conocimiento matemático no se limitó a la mera labor de puente. Es cierto que sus mayores y más conocidas aportaciones de carácter matemático giran alrededor de la Aritmética y del álgebra y, dentro de esta última, de la Trigonometría. Las razones para que se produjese tal situación estriban en que el hecho investigador no es un fenómeno aislado como algunos pueden creer, sino que está fuertemente condicionado por la sociedad en la cual se desarrolla. Desde este punto de vista, en la cultura árabe, en general, y en la de al-Andalus, en particular, los asuntos relacionados con la organización sociopolítica y religiosa marcan una línea de desarrollo práctico de la investigación matemática. Este pueblo concebía las Matemáticas como herramienta para otras ciencias -astronomía, astrología, óptica y medicina (a través de la astrología)- y como de utilidad social inmediata. Matemáticas para rezar, para navegar, para repartir herencias, medir tierras, etc. En suma, concebían las Matemáticas como hecho cultural. Lo anterior no significa que no hubiera avances en los fundamentos de las Matemáticas. Ciñéndonos al legado científico andalusí, sabemos [2] que al-Mu'taman, el rey sabio de Zaragoza durante el periodo de los Reinos de Taifas (1031-1086), escribió en su Kitab al-Istikmal ('Libro de la Perfección') una demostración del teorema atribuido casi siete siglos después al italiano Giovanni Ceva (1648-1738); que Qalasaki (s. XV), o Alcasavi o el Bastí según diferentes

lo admiramos por questo, ma non sono gli oggetti più adeguati, ad esempio, per spiegare teorie sulla chirurgia con raggi LASER. I mosaici dell'Alhambra di Granada costituiscono, a tutt'oggi, la migliore, e più completa, collezione di esempi della moderna teoria dei gruppi, e, per questo, costituiscono un autentico retaggio culturale con valore scientifico di attualità.

È normale incontrare nei libri di storia della scienza affermazioni che indicano che la produzione in lingua araba nel campo dei fondamenti della scienza fu scarsa. In particolare, per quanto riguarda la matematica, si dice che gli arabi si limitarono a tradurre opere greche e indiane che furono introdotte in Europa, qualcuna attraverso al-Andalus. Tuttavia, davanti all'evidenza dei manoscritti che sono stati man mano ritrovati, bisogna accettare che il loro contributo alla conoscenza matematica non si limitò al puro lavoro di trasferimento di conoscenza. È certo che i maggiori, e più noti, contributi di carattere matematico riguardano l'aritmetica e l'algebra e, all'interno di quest'ultima, la trigonometria. Le ragioni per le quali si produsse questa situazione sono legate al fatto che l'attività scientifica non è un fenomeno isolato, come qualcuno potrebbe credere, ma è fortemente condizionata dalla società all'interno della quale si sviluppa. Da questo punto di vista, nella cultura araba, in generale, e in quella di al-Andalus, in particolare, le relazioni con l'organizzazione socio-politica e religiosa segnano una linea di sviluppo pragmatico della ricerca matematica. Questo popolo concepiva la matematica come strumento per altre scienze - astronomia, astrologia, ottica e medicina (attraverso l'astrologia) - e per la sua utilità sociale immediata. Matematica per pregare, per navigare, per dividere eredità, misurare terre, ecc.. In sintesi concepivano la matematica come fatto culturale. Questo non significa che non ci furono dei progressi nei fondamenti della matematica. Limitandoci al contributo scientifico andalusí, sappiamo [2] che al-Mu'taman, il re sapiente di Saragozza durante il periodo del Regno di Taifa (1031-1086), scrisse nel suo Kitab al-Istikmal (Libro della perfezione) una dimostrazione del teorema attribuito quasi sette secoli più tardi all'italiano Giovanni Ceva (1648-1738); che Qalasaki (secolo XV), o Alcasavi o il Bastí se-

transcripciones, oriundo de la ciudad granadina de Baza y posible profesor de la Madraza en Granada mandada construir por Yusuf I, introdujo una notación simbólica algebraica similar a la que finalmente fue extendida por la escuela italiana durante el Renacimiento; o el granadino Abulcasim Asbag Abenmohamed (s. X), conocido vulgarmente por el Muhandis ('Geómetra'), que si bien es más conocido por sus trabajos en Astronomía, escribió una obra de comentarios a los Elementos de Euclides en forma de introducción a las Matemáticas; Benabixácar (s. XIII) fue gran conocedor de la ciencia griega, tal y como lo demuestran sus libros sobre la obra de Euclides y las crónicas de Apolonio; etc. No limitándonos en este comentario a al-Andalus, lo concluiremos mencionando a Ibn Sina, al que normalmente se le asigna erróneamente procedencia andalusí, que [2] además de traducir e interpretar como pocos a Aristóteles, analizó la axiomática de Euclides para la Geometría estableciendo su propio conjunto de axiomas. Cabe mayor fundamentación teórica?

Entonces, por qué se siguen haciendo uso de los tópicos antes aludidos? En pleno desarrollo islámico en la Península Ibérica, se destruyeron miles de volúmenes que estaban depositados en importantes bibliotecas. Como ejemplo baste citar la destrucción iniciada por Almanzor de la famosísima Biblioteca de al-Hakam II, en Córdoba, que contaba con más de 400.000 ejemplares, o la quema de libros escritos en árabe ordenada por el Cardenal Cisneros en la plaza de Bibrambla de Granada. Tras la expulsión de moriscos y judíos, la cultura andalusí fue desapareciendo rápidamente de la sociedad medieval de la Península Ibérica. Las Casas de la Sabiduría se tornaron en Bibliotecas de Monasterios y Universidades incipientes que utilizaban el latín como lenguaje científico. Así, esta civilización dejó un devastado legado científico al cual difícilmente puede accederse si no es de la mano de arabistas expertos. En resumen, no es que los andalusíes -al igual que el resto de los científicos del Islam Medieval- abandonasen la investigación en el terreno de los fundamentos, sino que sería más prudente afirmar que realmente no sabemos cuál fue su verdadera producción científica.

Sin embargo, esta civilización que goza de merecida fama por su gran sentido estético y gusto

condo trascrizioni differenti, oriundo della città granadina di Baza e forse professore della Madraza in Granada fatta costruire da Yusuf I, introdusse una notazione simbolica algebraica simile a quella che fu infine estesa dalla scuola italiana durante il rinascimento; o il granadino Abulcasim Asbag Abenmohamed (secolo X), conosciuto vulgarmente come el Muhandis (Geometra), più conosciuto per i suoi lavori in Astronomia, scrisse un'opera di commenti sugli Elementi di Euclide nella forma di introduzione alla matematica; Benabixácar (sec. XIII) fu un grande conoscitore della scienza greca, così come dimostrano i suoi libri sull'opera di Euclide e le cronache di Apollonio; ecc. Senza limitarci in questo commento ad al-Andalus, lo concluderemo menzionando Ibn Sina, al quale si assegna erroneamente origine andalusí, che [2] oltre a tradurre ed interpretare come pochi Aristotele, analizzò l'assiomatica di Euclide per la geometria stabilendone il suo insieme di assiomi. Ci può essere maggiore base teorica?

Quindi perché si continuano ad utilizzare gli stereotipi a cui abbiamo alluso in precedenza? In pieno sviluppo islamico nella penisola Iberica, si distrussero migliaia di volumi che erano conservati in importanti biblioteche. Come esempio, basta citare la distruzione iniziata da Almanzor della famosissima biblioteca di al-Hakam, in Cordoba, che contava più di 400.000 esemplari, o il rogo dei libri scritti in arabo ordinato dal cardinale Cisneros nella piazza Bibrambla di Granada. Con l'espulsione dei mori e degli ebrei, la cultura andalusí scomparve rapidamente dalla società medioevale della penisola Iberica. Le Case della Conoscenza divennero le biblioteche di monasteri e le nascenti università che utilizzavano il latino come linguaggio scientifico. Così questa civiltà lasciò un'eredità scientifica devastata alla quale si può accedere soltanto per il tramite di esperti arabisti. Riassumendo, non è che gli andalusí, così come per il resto degli scienziati dell'Islam medioevale, avessero abbandonato il terreno dei fondamenti, ma sarebbe più prudente affermare che realmente non sappiamo quale fu la loro vera produzione scientifica.

Tuttavia, questa civiltà che gode di meritata fama per il suo grande senso estetico e per il gu-

por los caminos indirectos para presentar sus pensamientos, nos dejó libros escritos sobre los muros de sus monumentos que, por desconocimiento de los conquistadores, nunca fueron objeto de atentado alguno antes más bien de elogio y admiración sin poder intuir la existencia de un tesoro oculto: la expresión de sus creencias en un bello mensaje altamente codificado. No se trata de la poesía epigráfica, sino de la decoración geométrica de la Arquitectura Islámica, en general, y de la Alhambra, en particular. Tal y como hoy sabemos, en la decoración geométrica de este monumento se esconde un tratado sobre el método heurístico de investigación cuyos resultados han necesitado del transcurso de varios siglos para que se produjesen los descubrimientos científicos necesarios que permitan clasificar el conocimiento allí desarrollado intuitivamente. Nunca fueron mejor aplicadas las Matemáticas, en este caso la Geometría, ya que sirvieron para manifestar sus creencias, como a continuación se verá, en un bello alarde de ingenio que se traduce en una creatividad sin precedentes en el diseño de los mosaicos de la Alhambra.

El caso singular que sigue pone de manifiesto una forma de abordar el trabajo científico con la cual indios y árabe-parlantes desarrollaron la ciencia: la búsqueda de nuevas ideas desde el ejercicio libre y audaz del método heurístico. Las justificaciones lógicas vienen a posteriori, una vez que hay algo que fundamentar. En el caso que nos ocupa, estas fundamentaciones tardaron cinco siglos en llegar. Los diseñadores de sus trazados fueron capaces de desarrollar, de modo empírico, todas las posibilidades que hoy nos demuestra la Teoría de Grupos Cristallográficos Planos, elaborada por cristalógrafos a partir del descubrimiento de los rayos-X. En un intento de divulgación, diré que hay 17 Grupos Cristallográficos Planos [3]; son objetos matemáticos abstractos mediante los cuales pueden ser clasificados los mosaicos periódicos planos según su simetría.

Fueron Fedorov, Schoenflies y Barlow quienes descubrieron por separado que en dimensión 3 hay 230 grupos cristallográficos que dan explicación a la estructura de las materias cristalinas. G. Polya y P. Niggli, ya en nuestro siglo, demostraron la existencia de los 17 grupos de isometrías del plano. Desde entonces se ha comenzado

sto di presentare i propri pensieri con percorsi indiretti, ci ha lasciato libri scritti sui muri dei suoi monumenti, che, per ignoranza dei conquistatori, non furono mai oggetto di alcun attentato anzi di elogio e ammirazione senza che si intuisse l'esistenza di un tesoro oculto: l'espressione delle proprie credenze religiose in un bel messaggio altamente codificato. Non si tratta di poesia epigrafica, bensì della decorazione geometrica dell'architettura islamica, in generale, e dell'Alhambra, in particolare. Per quanto ne sappiamo oggi, nella decorazione geometrica di questo monumento si nasconde un trattato sul metodo euristico di studio i cui risultati hanno richiesto il passare di vari secoli perché si producessero le scoperte scientifiche necessarie per permettere di classificare le conoscenze che lì sono state sviluppate intuitivamente. Mai fu applicata meglio la matematica, in questo caso la geometria, che servì per manifestare le proprie credenze religiose, come vedremo in seguito, in una bella ostentazione di ingegno che si traduce in creatività senza precedenti nel disegno dei mosaici dell'Alhambra.

Il caso singolare che segue presenta in maniera chiara un modo di affrontare il lavoro scientifico con il quale indiani e arabo-parlanti svilupparono la scienza: la ricerca di nuove idee usando l'esercizio libero e audace del metodo euristico. Le giustificazioni logiche vengono a posteriori, una volta che si trova qualche cosa che necessita di avere basi fondamentali. Nel caso di cui ci occupiamo, questi fondamenti tardarono cinque secoli prima di arrivare. I disegnatori di questi tracciati furono capaci di sviluppare, in modo empirico, tutte le possibilità che oggi ci dimostra la teoria dei gruppi cristallografici piani, elaborata dai ricercatori di cristallografia a partire dalla scoperta dei raggi X. In termini divulgativi posso affermare che esistono 17 gruppi cristallografici piani [3]; sono oggetti matematici astratti mediante i quali possono essere classificati i mosaici periodici piani secondo la loro simmetria.

Furono Fedorov, Schoenflies y Barlow che, separatamente, scoprirono che in tre dimensioni ci sono 230 gruppi cristallografici che spiegano la struttura della materia cristallina. Già nel nostro secolo, G. Polya e P. Niggli, dimostrarono l'esistenza dei 17 gruppi di isometria nel piano. Da quel momento è cominciata la ricerca, fatta dai

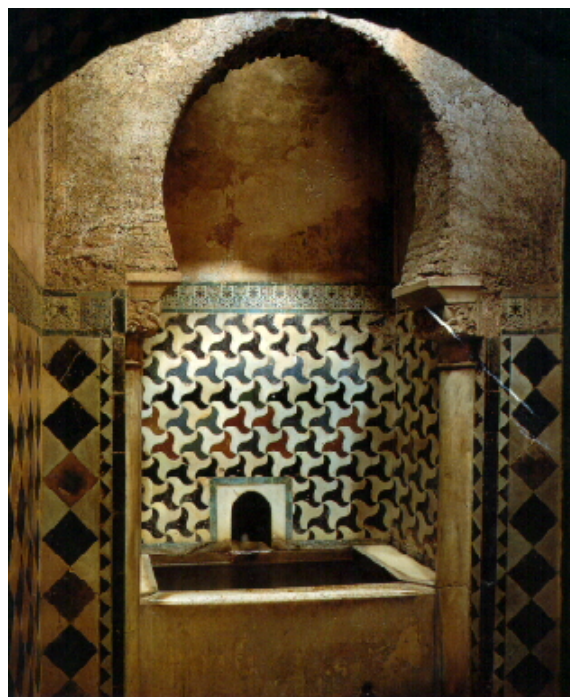


Figura 2: Alhambra, bagno nel Palazzo de Comares.

la búsqueda, hecha por matemáticos, de decoraciones periódicas del plano en obras de arte de determinadas culturas que han destacado en estas realizaciones. La publicación de los resultados obtenidos por unos y otros han dado origen a controversias. Por ejemplo, H. Weyl asegura en su obra *Simetría* [4], considerada como un clásico en el tema, que las 17 posibilidades eran conocidas por los artesanos del viejo Egipto; Fejes-Tóth en *Regular Figures*, [5], asegura que en la Alhambra de Granada hay una representación geométrica de cada uno de los 17 modelos posibles; ... Por contra, B. Grünbaum [6], sostiene que los egipcios sólo utilizaron 12 posibilidades y que los constructores de la Alhambra llegaron a obtener 13 variantes. En 1985 se cerró definitivamente tal discusión publicando los resultados de una labor de búsqueda exhaustiva en el monumento [7] mostrando ejemplos de los grupos ausentes. De este modo se descubre la existencia de una teoría ingenua de grupos en el diseño de decoraciones islámicas medievales ya que, sin conocerse el concepto matemático de grupo, se utilizaron las 17 estructuras básicas posibles para la creación de ciertos diseños simétricos planos, hoy en día interpretados como mosaicos periódicos. A esta etapa la denominamos Prehistoria de la Teoría de Grupos.

matemáticos, di decorazioni periodiche del piano in opere d'arte di varie culture che hanno primeggiato in queste realizzazioni. La pubblicazione dei risultati ottenuti da vari ricercatori ha dato origine a controversie. Per esempio H. Weyl assicura nella sua opera *Simmetria* [4], considerata un classico dell'argomento, che le 17 possibilità erano conosciute dagli artigiani dell'antico Egitto; Fejes-Tóth, in *Regular Figures* [5], assicura che nell'Alhambra di Granada c'è la rappresentazione geometrica di ognuno dei 17 modelli possibili. Al contrario, B. Grünbaum [6], sostiene che gli egiziani utilizzarono soltanto 12 possibilità e che i costruttori dell'Alhambra arrivarono ad ottenere 13 varianti. Nel 1985 si chiuse definitivamente la discussione pubblicando i risultati di un lavoro di ricerca esauriente nel monumento [7] mostrando esempi dei gruppi assenti. In questo modo si scopre l'esistenza di una teoria ingenua dei gruppi nel disegno di decorazioni islamiche medievali dato che, senza conoscere il concetto matematico di gruppo, si usano le 17 strutture di base possibili per la creazione di definiti disegni simmetrici piani, oggi interpretati come mosaici periodici. A questo stadio è stato assegnato il nome di preistoria della teoria dei gruppi.

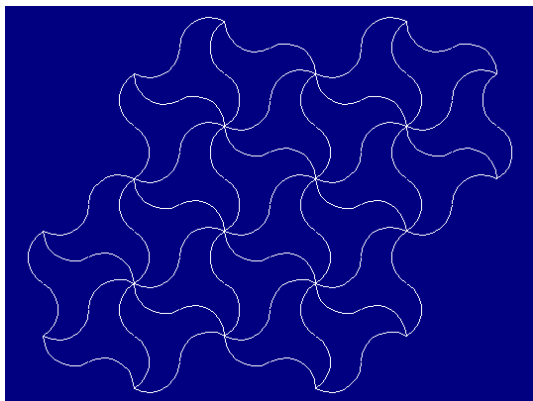


Figura 3

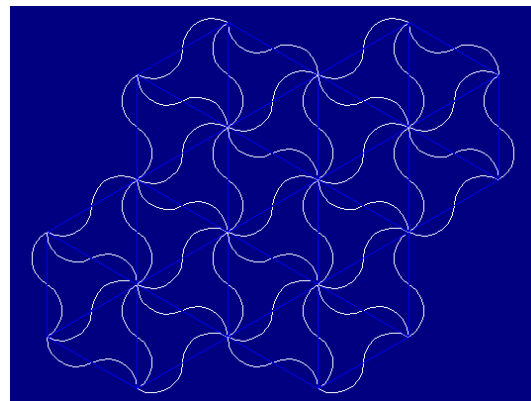


Figura 4

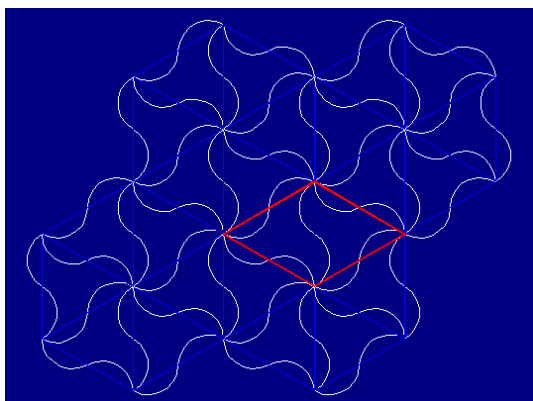


Figura 5

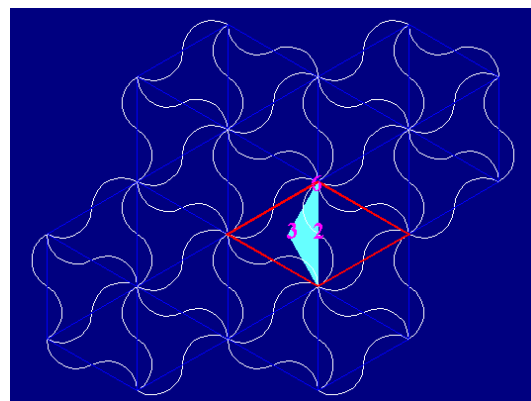


Figura 6

En efecto, en un deseo de manifestar con el lenguaje de la Geometría su creencia en la existencia de la Unidad (Allah) dentro de la multiplicidad, agotaron las estructuras geométricas planas posibles. Esta es la razón primera de la decoración geométrica de la Alhambra. Al existir la prohibición coránica de hacer figuraciones de Allah, se recurre a un lenguaje abstracto de formas geométricas para la decoración tanto en la arquitectura religiosa como en la del poder, clase a la que pertenece la Alhambra. En ella se usa la llamada tesela básica (como unidad) que, utilizando nuestro lenguaje actual, es extendida a todo el plano mediante los elementos de simetría del grupo cristalográfico correspondiente. Haciendo uso del alicatado que se encuentra en los baños del Palacio de Comares, Figura 2, y tomando su diseño básico (es decir, sin tener en cuenta el color), Figura 3, podemos observar que hay una malla de triángulos equiláteros que le dan estructura, Figura 4. Tomando un rombo como el que se muestra en la Figura 5, se puede observar que si lo trasladamos por todo el plano, vamos generando el diseño del alicatado elegi-

In effetti, nel desiderio di manifestare con il linguaggio della geometria il loro credo nell'esistenza dell'Unità (Allah) nella molteplicità, esaurirono le strutture geometriche piane possibili. Questa è la motivazione principale della decorazione geometrica dell'Alhambra. Data la proibizione coranica di rappresentare Allah, si ricorre ad un linguaggio astratto di forme geometriche per la decorazione tanto dell'architettura religiosa quanto come quella del potere, classe alla quale appartiene l'Alhambra. In quest'ultima si usa una tassellatura di base (come unità) che, usando il nostro linguaggio attuale, è estesa a tutto il piano mediante gli elementi di simmetria del gruppo cristallografico corrispondente. Utilizzando la piastrellatura che si incontra nei bagni del Palazzo de Comares (Figura 2), e prendendo il suo disegno di base (questo vuol dire, senza considerare il colore), Figura 3, possiamo osservare che c'è una maglia di triangoli equilateri che formano la struttura, Figura 4. Prendendo un rombo, come quello che di mostra nella Figura 5, si può osservare che, se lo trasliamo per tutto il piano, generiamo il disegno della tassel-

do; es decir, existe un paralelogramo tal que sus lados determinan las direcciones de dos traslaciones independientes con las que se puede generar el mosaico completo; se le llama región generatriz unidad y, en su interior, podemos destacar la existencia de un tesela básica (in triángulo isósceles), ver Figura 6, en la cual se encuentra el diseño mínimo necesario para reproducir el mosaico completo (la multiplicidad) someténdola a las transformaciones del grupo cristalográfico plano del tipo $p6$, cuyos generadores pueden ser dos rotaciones de órdenes 2 y 3, respectivamente, y con distinto centro. Como anécdota, cabe decir que, hasta hoy, la Alhambra es el único monumento en el mundo, construido antes del desarrollo de la Teoría de Grupos, que presenta tal singularidad.

Epílogo

Después de cinco siglos, los mosaicos de la Alhambra sirven para que artistas de la talla de Gaudí, Escher, Robinson, Falla, Debussy, ... que se inspiraron en ella para crear parte de su arte. Están sirviendo también para que los estudiantes de Matemáticas del mundo entero tengan los más bellos ejemplos de objetos tan abstractos como las isometrías, los grupos o las superficies, elementos de Geometría Euclídea, álgebra o Geometría Diferencial, que cobran vida. ¡Impresionante! Pero, ¿qué Alhambra podrían hacer hoy nuestros actuales tracistas. Si pensamos que en la Puerta del Vino hay un botella de Klein, alguien puede pensar que Klein la habrá dejado olvidada; igual sucede con las cintas de Moëbius de las tacas que hay a la entrada del Salón del Trono; pero oír que en los baños de Comares hay una esfera topológica, puede extrañar a muchos. ¿Se imagina estos objetos matemáticos? ¿Tienen interés para la Arquitectura y el Diseño? Con las nuevas geometrías y herramientas de nuestro siglo, mucho puede aportarse al mundo del Arte, en general. Será esta una puerta abierta por la que seguimos avanzando y ofreciendo nuevas visiones de la Alhambra.

Por último, es importante inculcar en nuestro alumnado que desde las Matemáticas se puede acceder a disfrutar de la belleza, ya que, según

latura scelta; questo significa che esiste un parallelogramma tale che i suoi lati determinano le direzioni di due traslazioni indipendenti con le quali si può generare il mosaico completo; si chiama regione generatrice unità e, al suo interno, possiamo identificare l'esistenza di una tassellatura di base (in triangoli isosceli), vedi Figura 6, nella quale si identifica il disegno minimo necessario per riprodurre il mosaico completo (la molteplicità) sottomettendola alla trasformazioni del gruppo cristalografico piano di tipo $p6$, i cui generatori possono essere due rotazioni di ordine 2 e 3, rispettivamente, e con centro distinto. Come aneddoto rimane da dire che, fino ad oggi, l'Alhambra risulta essere l'unico monumento al mondo, costruito prima dello sviluppo della teoria dei gruppi, che presenta questa caratteristica.

Epílogo

Dopo cinque secoli, i mosaici dell'Alhambra servono perché artisti del livello di Gaudí, Escher, Robinson, Falla, Debussy, ... si ispirino a questi per creare parte della loro arte. Stanno servendo anche perché gli studenti di matematica del mondo intero abbiano gli esempi più belli di oggetti tanto astratti come isometria, gruppi o superfici, elementi della geometria euclidea, algebra, geometria differenziale che diventano vivi. Impresionante! Però, che Alhambra potrebbero fare oggi i nostri progettisti? Se pensiamo che nella Porta del Vino c'è una bottiglia di Klein, qualcuno potrebbe pensare che Klein l'avrà dimenticata; succede anche con le striscie di Moëbius che ci sono nelle edicole che ci trovano all'entrata del Salone del Trono; però sentire che nel bagno de Comares c'è una sfera topologica, può sorprendere molti. Si immaginano questi oggetti matematici? Sono interessanti per l'architettura e il disegno? Con le nuove geometrie e strumenti del nostro secolo, molto può essere offerto al mondo dell'arte, in generale. Sarà questa una porta aperta per la quale continuiamo a progredire e offrire nuove visioni dell'Alhambra.

Infine, è importante inculcare ai nostri alunni che dalla matematica si può arrivare a godere della bellezza, in modo tale che, secondo le pa-

palabras de A.E. Pérez Sánchez, es intuita por todo el mundo, y se goza, pero siempre se desea alcanzar un nivel que la simple visión ingenua no alcanza. El espectador sensible quiere aprender a mirar; quiere recorrer - con alguien primero, solo después - el largo camino que el arte le sugiere. Las Matemáticas son una gran herramienta para lograrlo.

role di A. E. Pérez Sánchez, è intuita da tutti, e si gode, però sempre si desidera raggiungere un livello tale che la semplice visione ingenua non riesce a raggiungere. Lo spettatore sensibile desidera imparare ad osservare; desidera percorrere, prima insieme a qualcuno, e poi da solo, il lungo camino che suggerisce l'arte. La matematica è un grande strumento per arrivare a questo.



Ringraziamo A. M. Lallena per l'aiuto nella traduzione.



- [1] E. NUERE: *Tratado de la Carpintería de lo Blanco*, Ed. Ministerio de Cultura, Madrid (1982).
- [2] ALI A. AL-DAFFA- JOHN J. STROYLS: *Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam*, Ed. Wiley and Sons (1984).
- [3] Y. BOSSARD: *Rosaces, frises et pavages (vol. 1 y 2)*, Ed. CEDIC, Paris (1979).
- [4] H. WEYL: *La Simetría*, Princeton University Press (1952).
- [5] L. FEJES-TOTH: *Regular Figures*, Ed. Pergamon Press, New York (1964).
- [6] B. GRÜNBAUM, G. S. SHEPARD: *Tilings and patterns*, Freeman, San Francisco (1984).
- [7] R. PÉREZ GÓMEZ: "The four regular mosaics missing in The Alhambra", *Comp. and Math. with Appls.* **14**, **2** (1987) 133-137.



R. Pérez Gómez: Doctor en Matemáticas, profesor del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada que imparte docencia en las Escuelas Técnicas Superiores de Arquitectura e Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Ha escrito 9 libros de carácter científico-profesional, 10 capítulos de libros y 8 prólogos de libro. Sobre Matemáticas en el Arte, ha escrito dos libros sobre monumentos que forman parte del Patrimonio de la Humanidad: 7 paseos por la Alhambra (Ed. Proyecto Sur, 2007) y El Escorial. Historia, Arquitectura, Ciencia y Matemáticas (Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación).

R. Pérez Gómez: Dottore in Matematica, professore del Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università di Granada, insegna presso la Scuola Tecnica Superiore di Architettura e Ingegneria stradale, di canali e dei porti. Ha scritto 9 libri di carattere scientifico-professionale, 10 capitoli di libri e 8 introduzioni di libri. Sulla Matematica e Arte, ha scritto due libri su monumenti che formano parte del patrimonio dell'umanità: 7 paseos por la Alhambra (Ed. Proyecto Sur, 2007) y El Escorial. Historia, Arquitectura, Ciencia y Matemáticas (Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación).